8.4. Esperimentatu. Jarraibideak ateratzea

Propietate jakin bat elementu batzuen komuna den jakiteko modua hauetako askorekin *esperimentatzea* da. Esperimentazioa honela egiten da:

Problema bat aurrean dugula eta norantz jo edo zelan aurrera egin ez dakigunean, baliabide eraginkorrenetariko baten kasu konkretuak aztertzea lehen helburua izaten da. Gero, azterketa horretatik abiatuta, ondorioren bat ateratzea eta ondorio hori orokorragoetan egiaztatzen saiatzea izaten da ondorengo pausua.

Honek guztiak praktikan aierua sortzen du. Aieruen elementu-kopuru handia dugunean, zer gertatzen den aurreikustera ahalbidetzen gaitu. Ondoren, esperimentatzen jarraitzen da aierua egiaztatzen den edo baztertzen den ikusteko. Ongi ateratzen bada, frogatzeari ekingo diogu, indukzio-metodoa erabiliz.

Hona hemen adibide batzuk:

1. *Ikus ezazu: $1+3=4$; $1+3+5=9$; $1+3+5+7=16$; $1+3+5+7+9=25\ldots$ segida.*

   Zein da bere lege orokorra? Adieraz ezazu lortutako legea beti ematen dela.

   Elkarren segidako zenbaki bakoitien baturak, zenbaki karratu zehatza ematen duela, eta batugai-kopuruarekin erlazioa daukala ikusten da. Honen arabera, aieru hau egin dezakegu:
   $1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1) = n^2$ da.

   Aierua frogatzeko, indukzio-metodoa erabiliko dugu:
   - $n=1$ denean egia da: $1=1^2$.
   - Demagun batugai-kopurua n denean egia dela; hau da, $1+3+5+7+9+\ldots+(2n-1) = n2$
     Batugai-kopurua $(n+1)$ denean ere $1+3+5+7+9+\ldots+ (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$ egia dela frogatu behar da.
     Beste hau idatz dezakegu: $1+3+5+7+9+\ldots+ (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$
     Beraz, $(n+1)$ denean egiaztatzen da. Aierua egiazkoa da eta buruketa ebatzita geratzen da.

2. *Har itzazu elkarren segidako lau zenbaki arrunt eta biderka itzazu.*

Zer da ikusten duzuna? Zein da lege orokorra? Lortutako legea beti ematen da?

Zer gertatzen den ikus dezagun:

$1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 = 24 = 25-1 = 5^2-1$
$2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 5 = 120 = 121-1 = 11^2 - 1$
$3 \bullet 4 \bullet 5 \bullet 6 = 360 = 361 - 1 = 19^2-1 \dots$

Badirudi elkarren segidako lau zenbaki arrunten biderkadura karratu zehatza ken bat dela. Begiratu ea beste zenbaki batzuekin ere gertatzen den.

$12 \bullet 13 \bullet 14 \bullet 15 = 32.760 = 32.761 - 1 = 180^2-1$

Baina $5 = 1 \bullet 4+1$
$11 = 2 \bullet 5+1$
$19 = 3 \bullet 6+1 \dots$

Hau da, muturretako zenbakien biderkadura gehi bat.
Aurreko guztia kontuan izanda, egin dezakezu aieru hau:

$$x \bullet (x+1) \bullet (x+2) \bullet (x+3) = [x \bullet (x+3) + 1]^2 - 1$$

Arrazoitu zure erantzuna.
Erabili indukzio-metodoa

3. *Zenbaki arrunten kuboak kalkulatzen dira. Zenbat balio du lehen n kuboen baturak?*

Zenbakien kuboen baturak honela sortzen dira:

$1^3=1;\ 1^3+2^3=9;\ 1^3+2^3+3^3=36;\ 1^3+2^3+3^3+4^3= 100\dots$

Baturak karratu zehatzak direla ikusten da: 1= 12; 9=32; 36=62; 100=102

Baina aldi berean: 1=1; 3=1+2; 6=1+2+3; 10=1+2+3+4…
Ondorioz:

$1^3=1=(1)^2$
$1^3+2^3=9=3^2=(1+2)^2$
$1^3+2^3+3^3=36=6^2=(1+2+3)^2$
$1^3+2^3+3^3+4^3=100=10^2=(1+2+3+4)^2$
....

Aurreko guztia kontuan hartuta, egin dezakegu aieru hau:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+ \dots +n^3 = (1+2+3+4+\dots+n)^2 = \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2 \text{ dela.}$$

Aierua egiaztatu.
Erabili indukzio-metodoa

Ariketa hau berrikusteko, pentsa dezakegu halaber zer gertatzen den zenbakien karratuen baturekin, birkarratuenekin,… k. berreturen baturarekin.