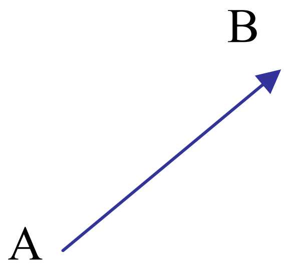
BEKTOREAK ESPAZIOAN

1. Eragiketak bektoreekin

A jatorria eta B muturra duen bektorea honela adierazten da: $\overrightarrow{AB}$



Bektore baten elementuak hauek dira:

- **Modulua**: A-tik B-rako distantzia, eta honela izendatzen da: $|\overrightarrow{AB}|$
- **Norabidea**: A eta B puntuak dauden zuzenarena eta zuzen horren paralelo guztienari norabidea deitzen zaio.
- **Noranzkoa**: Norabide bakoitzak kontrako bi noranzko ditu: A-tik B-ra, eta B-tik A-ra

Bi bektore berdinak dira modulu bera, norabide bera eta noranzko bera dutenean.

Bektoreak letraren gainean gezi bat jarrita izendatzen dira: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}...$, edo, bestela, ordezkarietako baten bitartez, jatorria eta muturra gainean gezitxo bat dutela idatziz.

1.1. Bektore baten eta zenbaki baten arteko biderketa.

$k \neq 0$ zenbaki baten eta $\vec{v}$ bektore baten arteko biderketa, $k \cdot \vec{v}$ beste bektore bat da eta honako osagai hauek ditu:

- Norabidea: $\vec{v}$-rena
- Noranzkoa: $\vec{v}$-rena edo bere kontrakoa, k-ren zeinuaren arabera.
- Modulua: $\vec{v}$-ren moduluaren eta k-ren balio absolutuaren arteko biderketa:

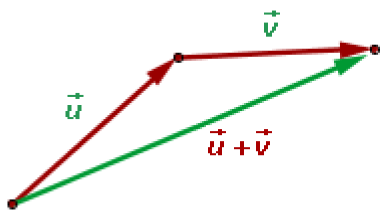
  $$|k\,\vec{v}| = |k|\,|\vec{v}|$$

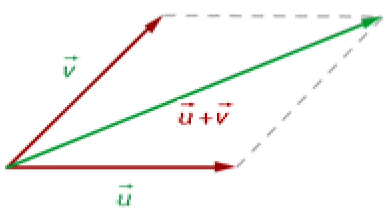
  $0\,\vec{v}$ bektorea **zero bektorea**, $\vec{0}$ da.

  $-1\,\vec{v}$ edo $-\vec{v}$, $\vec{v}$-ren **aurkakoa** esaten zaio.

1.2. Bektoreen arteko batura.

$\vec{u}$ eta $\vec{v}$, bi bektore batzeko, honela jokatu behar da: $\vec{v}$ jarri behar da $\vec{u}$-ren ostean, $\vec{v}$-ren jatorria eta $\vec{u}$-ren muturra bat etor daitezen. Baturaren emaitza, $\vec{u} + \vec{v}$, izango da jatorria $\vec{u}$-rena eta muturra $\vec{v}$-rena duen bektorea

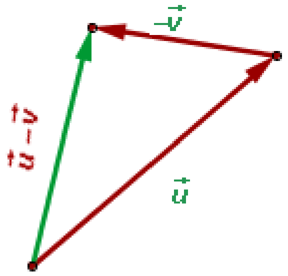




- $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ jatorri berean kokatzen baditugu eta paralelogramo bat osatzen badugu, jatorria $\vec{u}$ eta $\vec{v}$-rena bera izango duen diagonala, batura bektorea izango da.

1.3. Bektoreen arteko kenketa

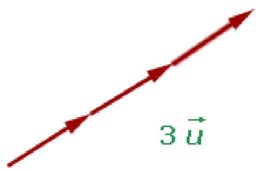
$\vec{u}$ eta $\vec{v}$, bi bektoreren arteko kenketa egiteko, $\vec{u}$ batu behar diogu $\vec{v}$-ren aurkakoari.



- $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ jatorri berean kokatzen baditugu eta paralelogramo bat osatzen badugu, $\vec{v}$-ren muturretik $\vec{u}$-ren muturrera doan diagonala kendura bektorea izango da.

1.4. Zenbakia eta bektorearen arteko biderkadura

k zenbaki bat bider $\vec{u}$ bektore bat ondoko baldintzak betetzen dituen bektore bat da:



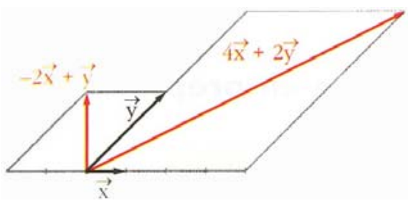
$\vec{u}$ bektorearen norabide berdina duena.
k positiboa bada, $\vec{u}$ bektorearen norantza berekoa.
k negatiboa bada, $\vec{u}$ bektorearen alderantzizko norantza duena.
Bere modulua $|k|\cdot|\vec{u}|$

2. Bektore baten adierazpen analitikoa

Segmentu orientatuen kasurako zehaztuko ditugu konbinazio linealak eta bektoreen menpekotasun eta independentzia lineala.

2.1. Bektoreen konbinazio lineala

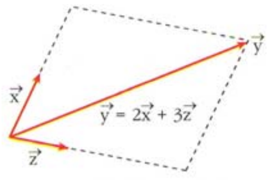
$\vec{x},\vec{y},\vec{z},...,\vec{w}$ zenbait bektore eta a, b, c,..., l zenbait zenbaki izanda, $a\vec{x}+b\vec{y}+c\vec{z}+...+l\vec{w}$ adierazpenari bektoreen konbinazio lineala esaten zaio.



2.2. Menpekotasun eta independentzia lineala

Zenbait bektore linealki menpekoak direla esaten da bektore horietakoren bat besteen konbinazio lineal moduan jar daitezkeenean. Horrela ez denean, linealki independenteak direla esaten da.

- *Lerrokatuta dauden bi bektore linealki menpekoak dira.*
- *Hiru bektore planokide linealki menpekoak dira.*



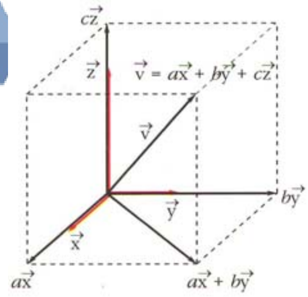
HIRU BEKTORE PLANOKIDE

BI BEKTORE LERROKATUTA

2.3. Oinarria

Planokideak ez diren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ hiru bektore linealki independenteak badira eta, horrez gain, espazioko beste edozein bektore modu bakar batean adierazi ahal bada hiru bektore horien konbinazio lineal moduan, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ oinarri bat eratzen dute.

Hiru bektore horiek euren artean perpendikularrak badira, oinarri **ortogonala** eratzen dutela esaten da. Horrez gainera, luzera bera badute (unitatetzat hartzen dena), oinarria **ortonormala** dela esaten da.



2.4. Bektore baten koordenatuak oinarri batekiko

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ oinarria emanda, $\vec{v}$ edozein bektore modu bakarrean jar daiteke oinarri horretako elementuen konbinazio lineal moduan:

$$\vec{v} = a\,\vec{x} + b\,\vec{y} + c\,\vec{z}$$

a, b, c zenbakiei $\vec{v}$-rekiko oinarriaren koordenatuak direla esaten zaie. Honela adierazten da:

$$\vec{v} = (a, b, c)$$

2.5. Eragiketak koordenatuekin

Bektoreen koordenatuek arrazoiz jokatzen dute eurekin eragiketak egiterakoan. Ikus dezagun ondoko adibideetan.

$\vec{u}(x, y, z)$ eta $\vec{v}(a, b, c)$ bektoreak emanik,

Batuketa: $\vec{u} + \vec{v} = (x + a, y + b, z + c)$

Biderketa zenbaki batekin: $k \cdot \vec{u} = (k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z)$

Konbinazio lineala: $p\vec{u} + q\vec{v} = (px + qa, py + qb, pz + qc)$

Ariketak: Or. 137 $\rightarrow$ 1. eta 2.

3. Bektoreen biderkadura eskalarra

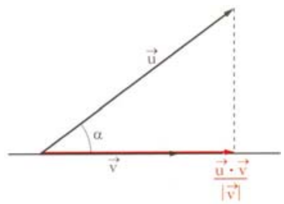
u eta **v**, bi bektoreren biderkadura eskalarra esaten diogu eta $\vec{u} \bullet \vec{v}$ adierazpenaren bitartez izendatzen dugu ondorengo emaitza hau:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})$$

Bai moduluak eta bai kosinua zenbakiak dira, beraz, biderkadura eskalarra zenbaki bat da.

Biderkadura eskalarraren propietateak.

- $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$ da, izan ere $\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}||\vec{u}|\cos(\vec{u},\vec{u}) = |\vec{u}|^2 \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$
- $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
- $\vec{u} = \vec{0}$ edo $\vec{v} = \vec{0}$ badira, orduan $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$ da.
- $\vec{u} \neq \vec{0}$ eta $\vec{v} \neq \vec{0}$ badira, orduan $\vec{u} \perp \vec{v}$ da beti eta $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$
- $\vec{v}$ -ren gaineko $\vec{u}$ -ren proiekzioa $\dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{v}|}$ da. Proiekzioaren zeinua + edo - izango da angelua zorrotza ala kamutsa den arabera.



- Trukakorra. $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$
- Elkarkorra. $(k\,\vec{u}) \bullet \vec{v} = k\,(\vec{u} \bullet \vec{v})$
- Banakorra. $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$
- (**i**,**j**,**k**) oinarri ortonormala bada, honako hau betetzen da:
  i·**i**=1 **j**·**j**=1 **k**·**k**=1
  i·**j**=0 **i**·**k**=0 **j**·**k**=0

Biderkadura eskalarraren adierazpen analitikoa.

u eta **v**-ren koordenatuak $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ eta $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ badira (**i**,**j**,**k**) oinarri ortonormal batekiko, orduan:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

(Frogatu)

Biderkadura eskalarraren erabilerak

u eta **v**-ren koordenatuak $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$ eta $\vec{v}(x_2, y_2, z_2)$ badira (**i**,**j**,**k**) oinarri ortonormal batekiko, orduan:

Bektore baten modulua

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}|^2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

Bi bektorek osatzen duten angelua.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

v bektorearen gaineko u bektorearen proiekzioa

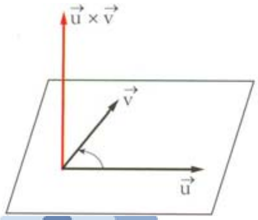
$$\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

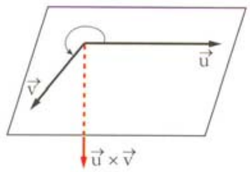
Ariketak. Or. 141 $\to$ 1, 2 eta 3

4. Biderkadura bektoriala

u eta **v** bektoreen biderkadura bektoriala $\vec{u}\times\vec{v}$, beste bektore bat da eta honela definitzen da:

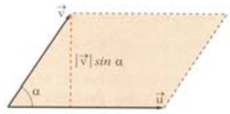
- **u** eta **v** linealki independenteak badira, $\vec{u}\times\vec{v}$ honako ezaugarriak dituen bektorea da:
  - o Modulua: $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\sin(\vec{u},\vec{v})$
  - o Norabidea: **u** eta **v**-rekiko perpendikular
  - o Noranzkoa:
    ang(**u**,**v**)<180º bada, gorantz
    ang(**u**,**v**)>180º bada, beherantz





- **u** eta **v** linealki menpekoak badira, hau da, euretariko bat **0** bada edo norabide bera badute, orduan $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$

Propietateak



Ilundutako paralelogramoaren azalera: $|\vec{u}\times\vec{v}|$

- $\vec{u}\times\vec{v}$ biderkadura bektorialaren modulua eta u eta v bektoreek mugatzen duten paralelogramoaren azalera berdinak dira.
- $\vec{u}\times\vec{v} = -\vec{v}\times\vec{u}$. Hau da, modulu bera, norabide bera eta aurkako noranzkoa dute.
- $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$, $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ menpekoak badira. Paraleloak badira.
- (**i**,**j**,**k**) oinarri ortonormala bada, honako hau betetzen da:
  ix**i**=0 **j**x**j**=0 **k**x**k**=0
  ix**j**=**k** **i**x**k**=**j** **j**x**k**=**i**
- $(a\,\vec{u})\times\vec{v} = a\,(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\times(a\vec{v})$
- Biderkadura bektorialak ez du elkartze propietatea betetzen:
  $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$ eta $(\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$ ez dira berdinak
- Biderkadura bektorialaren adierazpen analitikoa.
  $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ eta $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ badira, orduan

$$\vec{u}\times\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 = \ldots = |\vec{u}|^2\,|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\bullet\vec{v})^2$$. Baina,

$$|\vec{u}|^2\,|\vec{v}|^2 - (\vec{u}\bullet\vec{v})^2 = |\vec{u}|^2\,|\vec{v}|^2 - \left(|\vec{u}|\,|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})\right)^2 = |\vec{u}|^2\,|\vec{v}|^2(1-\cos^2(\vec{u},\vec{v})) =$$

$$= |\vec{u}|^2\,|\vec{v}|^2\sin^2(\vec{u},\vec{v}), \quad 0\le \mathrm{ang}(\vec{u},\vec{v})\le\pi$$ izanik.

Ariketak: Or. 144 → 1, 2 eta 3

5. Hiru bektoreren biderkadura nahasia

u, **v**, **w** bektoreen biderkadura nahasia esaten zaio eta [**u**, **v**, **w**] adierazpena du, eragiketa honela egitean lortzen den zenbakiari:

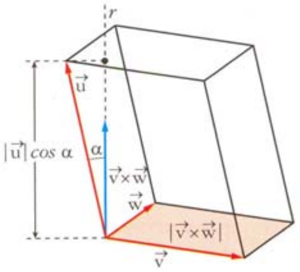
$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})$$

Biderkadura nahasiaren interpretazio geometrikoa

$$\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=|\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}|\cos\alpha=|\vec{v}\times\vec{w}|(|\vec{u}|\cos\alpha)=\begin{pmatrix}\text{v eta w bektoreek mugatutako}\\ \text{paralelogramoaren azalera}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix}\vec{v}\text{ eta }\vec{w}-\text{k mugatutako planoarekiko per}-\\ \text{pendikularraren gaineko }\vec{u}-\text{ren proiekzioa}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u},\vec{v}\text{ eta }\vec{w}-\text{k mugatutako para}-\\ \text{lelepipedoaren oinarriaren azalera}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix}\vec{u},\vec{v}\text{ eta }\vec{w}-\text{k mugatutako}\\ \text{paralelepipedoaren altuera}\end{pmatrix}=\vec{u},\vec{v}\text{ eta }\vec{w}-\text{k mugatutako paralelepipedoaren bolumena}$$



Adierazpen analitikoa

$\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$ eta $\vec{w}(x_3,y_3,z_3)$ badira, orduan

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\bullet(\vec{v}\times\vec{w})=(x_1,y_1,z_1)\bullet\left(\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}z_2 & x_2\\ z_3 & x_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}\right)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Propietateak

- Bektoreetarikoen bat nulua bada, biderketa nahasia nulua da.
- [**u**, **v**, **w**] =[**v**, **w**, **u**] =[**w**, **u**, **v**] = -[**v**, **u**, **w**] = -[**u**, **w**, **v**] = -[**w**, **v**, **u**]
- [**u**, **v**, **w**] =0 bada, **u**, **v**, **w** bektoreak menpekoak dira.
- [λ**u**, **v**, **w**] = [**u**, λ**v**, **w**] = [**u**, **v**, λ**w**] = λ·[**u**, **v**, **w**]

Ariketak: Or. 145 → 1, 2