

1. Kurba baten zuzen ukitzaila bere puntu batean

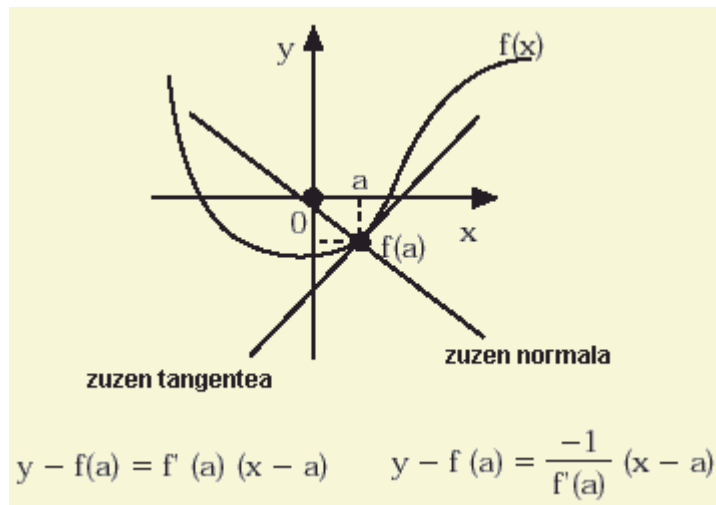
Funtzio bateko deribatuak erabiltzeak, bitarteko erraza eskaintzen du puntu zehatz bateko funtzioaren bihurtzune adierazgarriari zuzen tangente eta normaltako ekuazioa zehazteko.

$x = a$ den puntuan $f(x)$ funtzio etengabeko eta deribagarria badaukagu, puntuko funtzioari eginiko **zuzen tangentearen** ekuazioa ondorengo ekuazioaren arabera da:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Antzeko eran, puntuko funtzioarekiko **zuzen normalak** ondorengo ekuazioa jarraitzen du:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$$



Puntu bateko funtzio batekiko zuzen tangente eta normala.

2. Lehenengo deribatutik ateratako informazioa

Deribatu existitzen ez den puntua edo deribatuaren balioa zero den puntuak, **puntu kritikoak** deitzen dira.

2.1. Funtzioen gorakortasuna eta beherakortasuna

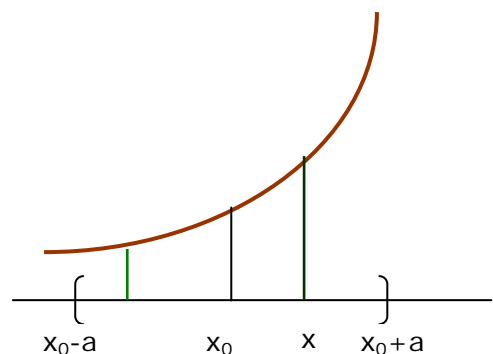
Funtzio bat aztertzeke orduan garrantzitsua den beste alde bat funtzioaren gorazko edo beheranzko joerak ikertzea da.

Funtzio bat hertsiko **gorakorra** izango da (a,b) tartean, tarte horretako edozein bi puntutarako, x_1 eta x_2 , hurrengoa egiaztatzen denean: $x_1 < x_2$ bada, orduan, $f(x_1) < f(x_2)$ bada.

Era berean, hertsiko **beherakorra** izango da (a,b) tartean, tarte horretako edozein bi puntutarako, x_1 eta x_2 , hurrengoa egiaztatzen denean: $x_1 < x_2$ bada, orduan, $f(x_1) > f(x_2)$ bada.

$y=f(x)$ **deribagarria** eta **gorakorra** da x_0 duen puntuan $\Rightarrow f'(x_0) \geq 0$ denean.

Eta, $f'(x_0) > 0$ denean $f(x)$ funtzioa **gorakorra** da x_0 duen puntuan.



$y=f(x)$ **deribagarria** eta **beherakorra** da x_0 duen puntuan $\Rightarrow f'(x_0) \leq 0$ denean. Eta, $f'(x_0) < 0$ denean $f(x)$ funtzioa **beherakorra** da x_0 duen puntuan.

Funtzio **deribagarria**, (a, b) tartean hartuz, honela izango da:

- Gorakorra tartean, bere deribatua positiboa bada tartearen puntu guztietarako.
- Beherakorra, bere deribatua negatiboa denean tartearen puntu guztietarako.
- Konstantea, deribatua nulua bada tarte osoan.

2.2. Maximo eta minimo erlatiboak

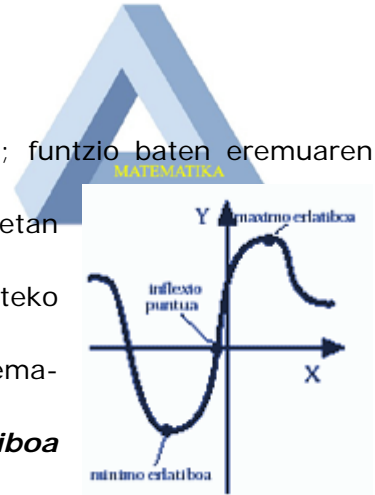
Funtzioaren goranzko joera puntu batzuetan aldatzen da; funtzio baten eremuaren puntu horiek maximo eta minimo erlatiboak deitzen dira.

$y=f(x)$ deribagarria bada x_0 duen puntuan eta puntu horretan maximo edo minimoren bat badu, orduan, $f'(x_0) = 0$ da.

Funtzio deribagarrietan maximo edo minimo erlatiboa egoteko beharrezko baldintza $f'(x_0) = 0$ izatea da.

Aurreko baldintza bete ondoren nahikoa da ondorengoa ematea:

- $f'(x_0^-) > 0$ eta $f'(x_0^+) < 0$, $(x_0, f(x_0))$ **maximo erlatiboa** izan dadin.
- $f'(x_0^-) < 0$ eta $f'(x_0^+) > 0$, $(x_0, f(x_0))$ **minimo erlatiboa** izan dadin.
- $[f'(x_0^-) > 0$ eta $f'(x_0^+) > 0]$ edo $[f'(x_0^-) < 0$ eta $f'(x_0^+) < 0]$, $(x_0, f(x_0))$ **inflexio puntua** izan dadin.



3. Bigarren deribatutik ateratako informazioa

3.1. Funtzioen ahurtasuna eta ganbiltasuna

Kurbatura mota antzemateko irizpidea ondokoa da:

$f''(x_0) > 0$ bada, funtzioa **ahurra** da x_0 abzizatzen duen puntuan.

$f''(x_0) < 0$ bada, funtzioa **ganbila** da x_0 abzizatzen duen puntuan.

3.2. Inflexio puntua

Funtzio deribagarrietan inflexio puntua egoteko beharrezko baldintza $f''(x_0) = 0$ da.

Aurreko baldintza bete ondoren nahikoa da ondorengoa ematea:

$f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$ bada, $(x_0, f(x_0))$ puntua inflexio puntua da.

3.3. Maximoak eta minimoak identifikatzeko erabili

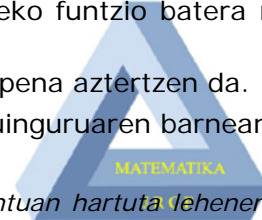
$f'(x_0) = 0$ eta $f''(x_0)$ existitzen bada, orduan,

- $f''(x_0) > 0 \rightarrow f(x)$ -ek minimo erlatibo bat du $(x_0, f(x_0))$ puntuan.
- $f''(x_0) < 0 \rightarrow f(x)$ -ek maximo erlatibo bat du $(x_0, f(x_0))$ puntuan.

4. Funtzioen optimizazioa

Araza erreala deskribatzen duen funtzio matematiko bat **optimizatze**ko, normalean hurrengo arau praktiko operatiboak aplikatzen dira:

- Aztertutako funtzioaren adierazpen algebrakoa zehazten da, arazoaren **datu** erabilgarrien arabera.
- Adierazpen hori sinplifikatu egiten da, **aldagai** bakarreko funtzio batera murriztu arte.
- Maximo, minimo eta beste puntu singular batzuen kokapena aztertzen da.
- emaitzak interpretatzen dira, arazoak zehaztutako testuinguruaren barnean.



Adibidea. Deskonposatu 36 zenbakia bi batugai positibotan, kontuan hartuta lehenengo batugaiaren eta bigarrenaren karratuaren arteko biderketa maximo bat dela.

Batugaiak $x > 0$ eta $36 - x$ ($x < 36$) dira

Eskatutako funtzioa $f(x) = x(36 - x)^2$, $0 < x < 36$ delarik izan behar du.

$$f(x) = x^3 - 72x^2 + 1296x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 144x + 1296$$

$f'(x) = 0$ izan behar du, beraz, $x = 12$ eta $x = 36$. Bigarren hau ezinezkoa da, zeren $x < 36$ baita.

Soluzioa: Lehenengo batugaia 12 eta bigarrena 24 dira.

5. L'Hopital-en erregela: Limiteen kalkulurako.

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ erako limiteetan a bada $-\infty$, $+\infty$ edo zenbaki bat, eta emaitza

$\left(\frac{0}{0}\right)$ edo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ motako indeterminazio bat bada, limitea kalkulatu daiteke izendatzai-

lea eta zenbakitzailera deribatuz eta euren deribatuen zatiketaren limitea kalkulatu (existitzen baldin bada).

Batzuetan, lehen urrats hori egin ondoren, beste indeterminazio bat lortzen dugu eta, horrelakoetan, prozesua errepikatu egin behar dugu.

Ikus dezagun erregelaren erabilpena indeterminazio mota desberdinetan:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = L'H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = L'H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$L'H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x)) = (0 \cdot \infty) = L'H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = L'H = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \dots = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x) - x + 1}{(x-1) \ln(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = L'H =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) + 1 - 1}{\ln(x) + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x)}{x \ln(x) + x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = L'H = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) + 1}{\ln(x) + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

- 0^0 , 1^∞ eta ∞^0 erako indeterminazioak gainditzeko logaritmo nepertarrak erabiliko ditugu, 0^∞ erako indeterminazioak lortzeko.

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} \rightarrow \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(x) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = L'H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0. \text{ Beraz,}$$

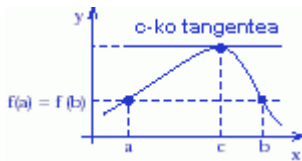
$$\ln y = 0 \rightarrow y = e^0 = 1$$



6. Tarte batean deribagarriak diren funtzioen propietateak

6.1. Rolle-ren teorema

$[a, b]$ bitartean etengabeko funtzioa eta (a, b) -an deribagarria badaukagu, $f(a)=f(b)$ gertatzen delarik, **$f'(c)=0$** gertatzen den bitarte barneko gutxienez c puntu bat existitzen da, hau da, non zuzen tangentea ardatz horizontalaren paraleloa egiten baita.



Rolle-ren teoremako ilustrazio grafikoa.

Esanahi geometrikoa

$y=f(x)$ funtzioak adierazten duen kurbak, gutxienez, $c \in (a, b)$ tarteko puntu batean zuzen ukitzaile horizontala du, non $f'(c)=0$ den.

Adibidea: Egiaztatu $y=x^3 - 4x + 3$ funtzioak Rolle-ren teoremaren hipotesia betetzen duela $[0, 2]$ tartean. Non betetzen du tesia?

Funtzio polinomikoa denez, \mathbb{R} osoan jarraitua eta deribagarria da, ondorioz, $[0, 2]$ tartean jarraitua eta $(0, 2)$ tartean deribagarria. Gainera, $f(0)=f(2)=3$ da. Hipotesia betetzen du. Beraz, tesia ere beteko du.

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ eta } x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

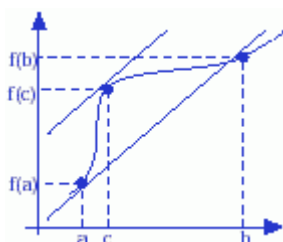
Hala da, $c = \sqrt{\frac{4}{3}} \in (0, 2)$ eta $f'(c)=0$ da.

6.2. Batez besteko balioaren teorema (Lagrange)

$[a, b]$ bitarte itxian etengabeko funtzioa eta (a, b) bitarte irekian deribagarria badaukagu, (a, b) aipaturiko bitarteko c puntu bat gutxienez existitzen da, non ondorengoa egiaztatzen baita:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

$c \in (a, b)$ -rekin.



Balio ertaineko teoremaren ilustrazio grafikoa.

Esanahi geometrikoa

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ adierazpenak $A=(a,f(a))$ eta $B=(b, f(b))$ puntuetatik igarotzen den zuzenaren maldaren balioa ematen du.

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ izaterakoan, kurbaren $(c, f(c))$ puntuko zuzen ukitzaila eta A eta B puntuetatik igarotzen dena, paraleloak dira. Hau da, beti existituko da $c \in (a,b)$ puntu bat gutxienez, non kurbaren ukitzaila AB zuzenarekiko paraleloa den.



Adibidea: Egiaztatu $y = \sqrt{x}$ funtzioak batez besteko balioaren teoremaren hipotesia betetzen duela $[0,9]$ tartean. Non betetzen du tesia?

$y = \sqrt{x}$ $(0,\infty)$ tartean jarraitua eta deribagarria da, ondorioz, $[0,9]$ tartean jarraitua eta $(0,9)$ tartean deribagarria. Hipotesia betetzen du. Beraz, tesia ere beteko du.

$$\frac{f(9)-f(0)}{9-0} = \frac{\sqrt{9}-0}{9-0} = \frac{1}{3} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Beraz, } \frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \Rightarrow c = \frac{9}{4} \in (0,9)$$