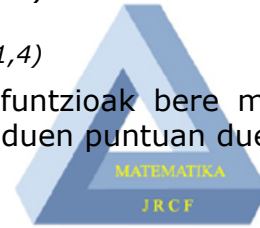


1. Izan bedi  $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x}}$  funtzioa,
- Bilatu gorakor- eta beherakor tarteak. Kalkulatu mutur erlatiboak (zein puntutan lortzen diren eta zein balio lortzen duten)
  - Kalkulatu funtzioaren inflexio puntua.  
Sol.: Gorakorra  $x > 1/3$  eta beherakorra  $x < 1/3$ ; Inflexio puntua (1,4)
2. Bila ezazu funtzio bat non  $f'(x) = x^2 + x - 6$  den eta funtzioak bere maximo erlatiboa duen puntuan duen balioa minimo erlatiboa duen puntuan duenaren hirukoitza den.  
Sol.:  $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 6x + 71/4$
3. Izan bedi  $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$  funtzioa. Jakinda funtzioaren inflexio-puntuan zuzen ukitzaillearen ekuazioa  $y = 2x + 3$  dela, bilatu a eta b-ren balioak.  
Sol.:  $a = 26$  eta  $b = 19$
4. Izan bedi  $f(x) = x^2 \ln(x)$  funtzioa.
- Bilatu gorakor- eta beherakor tarteak. Kalkulatu mutur erlatiboak (zein puntutan lortzen diren eta zein balio lortzen duten)
  - Bila ezazu  $x = \sqrt{e}$  abzisa puntuan funtzioari ukitzaillea den zuzenaren ekuazioa.  
Sol.:  $x < e^{-1/2}$  beherakorra eta  $x > e^{-1/2}$  gorakorra;  $y - e/2 = 2 e^{1/2} (x - e^{1/2})$
5. Izan bedi  $f(x) = x^2 e^{-x}$  funtzioa,
- Kalkulatu mutur erlatiboak (zein puntutan lortzen diren eta zein balio lortzen duten)
  - Bilatu funtzioaren asintotak.  
Sol.: (0,0) minimoa eta (2,4/e<sup>2</sup>) maximoa;  $y = 0$  asintota horizontala
6. Izan bedi  $f(x) = (x-3)e^x$  funtzioa,
- Kalkulatu mutur erlatiboak (zein puntutan lortzen diren eta zein balio lortzen duten)
  - Inflexio-puntuan funtzioari ukitzaillea den zuzenaren ekuazioa bila ezazu.  
Sol.: (2, -e<sup>2</sup>) minimoa;  $y + 2e = -e(x-1)$
7. Izan bedi  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$  funtzioa,
- Kalkulatu bere asintotak.
  - Bilatu gorakor- eta beherakor tarteak. Kalkulatu mutur erlatiboak (zein puntutan lortzen diren eta zein balio lortzen duten)
  - Egin adierazpen grafikoa  
Sol.:  $x = 2$ ,  $x = -2$ ,  $y = 1$ ;  $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$  gorakorra eta  $(0, 2) \cup (2, \infty)$  beherakorra
8. Jakinda  $f''(x) = x^2 - 1$  eta funtzioari  $x = 0$  abzisan ukitzaillea den zuzena  $y = 1$  dela, bilatu  $f(x)$  funtzioa.  
Sol.:  $f(x) = x^4/12 - x^2/2 + 1$
9. Izan bedi  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  funtzioa,
- Bilatu gorakor- eta beherakor tarteak. Kalkulatu mutur erlatiboak (zein puntutan lortzen diren eta zein balio lortzen duten)
  - Kalkulatu zuzen ukitzaillea abzisa negatiboa duen funtzioaren inflexio-puntuan.  
Sol.:  $x < 0$  beherakorra eta  $x > 0$  gorakorra;  $y - \ln(2) = -x - 1$



10. Izan bedi  $f(x) = x^2 - |x|$  funtzioa,

- Ikertu funtzioaren deribagarritasuna.
- Bilatu funtzioaren gorakor- eta beherakor-tarteak.
- Bilatu funtzioaren mutur erlatiboak.

*Sol.:  $x=0$  ez da deribagarria;  $(0, 1/2)$  beherakorra eta  $(1/2, \infty)$  gorakorra,  $(1/2, -1/4)$  eta  $(-1/2, -1/4)$  puntuetan minimo erlatiboak*

11. Jakinda  $f''(x) = 12x - 6$  dela eta funtzioari  $x=2$  abzisa ukitzea den zuzena  $4x - y - 7 = 0$  dela, bilatu  $f(x)$  funtzioa.

*Sol.:  $2x^3 - 3x^2 - 8x + 13$*

12. Bila ezazu  $y = x \cdot e^{-x^2}$  kurbako puntu bat non zuzen ukitzea den malda maximoa den.

*Sol.:  $x=0$  denean.*

13. Izan bedi  $f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}$ ,  $x \neq 0$

- Kalkulatu, baldin badaude, ardatzekin ebaki-puntuak eta asintotak.
- Kalkulatu gorakor- eta beherako-tarteak eta mutur erlatiboak.
- Egi bere adierazpen grafikoa.

*Sol.: Ez daude,  $x=0$  asintota;  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  gorakorra eta  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  beherakorra,  $(-1, -4)$  maximoa eta  $(1, 4)$  minimoa.*

14. Izan bedi  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$  funtzioa,

- Kalkulatu, baldin badaude, funtzioaren asintotak.
- Kalkulatu gorakor- eta beherakor-tarteak eta mutur erlatiboak.
- Egin adierazpen grafikoa.

*Sol.:  $y=1$  asintota,  $-1 > x > 1$  gorakorra eta  $-1 < x < 1$  beherakorra,  $(-1, 3)$  maximoa eta  $(1, 1/3)$  minimoa*

15. Izan bedi  $f(x) = \frac{x(\ln(x))^2}{(x-1)^2}$  funtzioa, bilatu bere asintotak.

*Sol.:  $y=0$  asintota horizontala.*

16. Izan bedi  $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 0 < x < 3 \\ -2x + 8, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$  funtzioa,

- Bila ezazu  $f(x)$  funtzioa  $f(1) = 16/3$  bada.
- Bila ezazu  $x=1$  abzisa puntuan kurbari ukitzea den zuzenaren ekuazioa.

*Sol.:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} + 5x, & 0 \leq x < 3 \\ -x^2 + 8x - 7, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$  ;  $y - \frac{16}{3} = \frac{2}{3}(x - 1)$*

17. Ezaguna da  $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 \leq x < 2 \\ -4 + \sqrt{x-1}, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$  funtzioa  $(0, 5)$  tartean deribagarria

dela.

- Kalkulatu a eta b
- Kalkulatu  $x=2$  abzisa puntuan kurbari ukitzea den zuzenaren ekuazioa.

*Sol.:  $a = -7/2$  eta  $b = 1$ ;  $x - 2y - 8 = 0$*

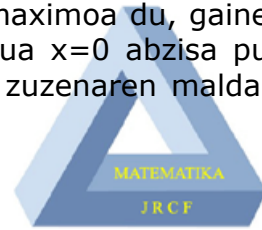
18. Izan bedi  $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$  funtzioa,  
 a) Kalkulatu a eta b, jakinda funtzioa (2,2) puntutik igarotzen dela eta  $x=0$  abzisa puntuan inflexio-puntua duela.

b) Kalkulatu ukitzailea eta normalaren ekuazioa bere inflexio-puntuan.

Sol.:  $a=0$  eta  $b=-7/2$ ; ukitzailea  $y=1-7/2x$  eta normala  $y=1+2/7x$

19.  $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$  funtzioak  $x=-1$  abzisa puntuan maximoa du, gainera OX ardatza  $x=-2$  denean ebakitzen du eta inflexio-puntua  $x=0$  abzisa puntuan du. Horrez gain,  $x=2$  abzisan kurbari ukitzailea den zuzenaren malda 9 da. Kalkulatu a, b, c eta d-ren balioak.

Sol.:  $a=1$ ,  $b=0$ ,  $c=-3$  eta  $d=2$



20. Izan bedi  $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ ,  $x \neq 0$  funtzioa,

a) Kalkulatu asintotak.

b) Kalkulatu gorakor- eta beherako-tarteak eta mutur erlatiboak.

c) Egin adierazpen grafikoa

Sol.:  $x=0$  eta  $y=x$ ;  $(-\infty,-1)$  gorakorra eta  $(-1,0) \cup (0,1)$  beherakorra,  $(1,2)$  minimoa eta  $(-1,-2)$  maximoa

21. Izan bedi  $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$ ,  $x \neq 0$  funtzioa,

a) Kalkulatu bere asintotak.

b) Kalkulatu gorakor- eta beherakor-tarteak.

c) Kalkulatu ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak.

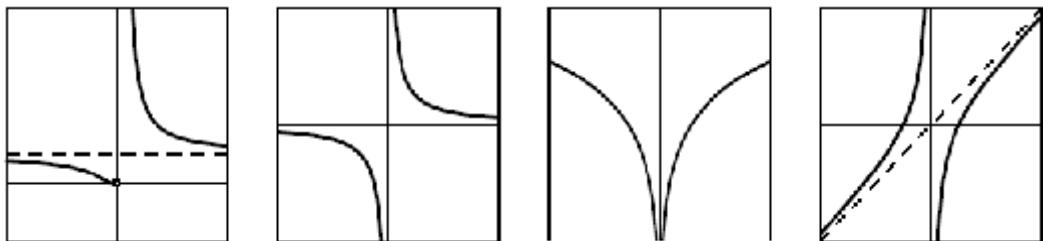
d) Egin adierazpen grafikoa.

Sol.:  $x=1$  eta  $y=0$ ;  $(-\infty,2)$  beherakorra eta  $(2,\infty)-\{1\}$  beherakorra,  $(-\infty,1)$  ahurra eta  $(1,\infty)$  ganbila.

22. Izan bitez  $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ ,  $g(x)=e^{1/x}$  eta  $h(x)=\text{Ln}|x|$ ,  $x \neq 0$  funtzioak,

a) Bilatu  $f(x)$ ,  $g(x)$  eta  $h(x)$  funtzioen asintotak.

b) Ondoko grafikoetatik, zein dagokio  $f(x)$ ,  $g(x)$  edo  $h(x)$  funtzioari? Arrazoitu erantzuna.



Sol.:  $f(x)$ :  $x=0$  (4),  $g(x)$ :  $y=1$  (1) eta  $h(x)$ :  $x=0$  (3)

23. Izan bedi  $f(x)=\frac{5x+8}{x^2+x+1}$  funtzioa,

a) Bilatu ardatzekin ebaki-puntuak.

b) Kalkulatu asintotak.

c) Kalkulatu gorakor- eta beherako-tarteak eta mutur erlatiboak.

d) Egin adierazpen grafikoa

Sol.:  $(0,8)$ ,  $(-8/5,0)$ ;  $y=0$ ;  $(-\infty,-3) \cup (-1/5, \infty)$  beherakorra eta  $(-3,-1/5)$  gorakorra,  $(-1/5,25/3)$  maximoa eta  $(-3,-1)$  minimoa

24. Izan bedi  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$ ,  $x \neq 2$  funtzioa,

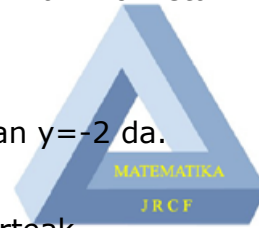
- Kalkulatu bere asintotak.
- Kalkulatu gorakor- eta beherakor-tarteak.
- Kalkulatu, baldin badaude,  $[0,2)$  tartean maximo eta minimo erlatiboak.

Sol.:  $x=2$ ; beti gorakorra;  $(0, -3/2)$  puntuan maximo absolutua.

25.  $f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$  funtzioaren ukitzailea  $x=1$  abzisa puntuan  $y=-2$  da.

- kalkulatu a eta b
- Kalkulatu funtzioaren gorakor- eta beherakor-tarteak.

Sol.:  $a=b=-1$ ;  $(0,1)$  gorakorra eta  $(1, \infty)$  beherakorra,  $(1, -2)$  maximoa



26. Izan bedi  $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$  funtzioa,

- Kalkulatu asintotak.
- Kalkulatu gorakor- eta beherako-tarteak eta mutur erlatiboak.
- Egin adierazpen grafikoa

Sol.:  $y=0$ ;  $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$  beherakorra,  $(1, 3)$  gorakorra,  $(1, 0)$  minimoa eta  $(3, 4/e^3)$  maximoa

27. Funtzio bati buruz zera ezagutzen da  $f(3)=6$  dela eta bere funtzio deribatua

$$f'(x) = \begin{cases} 5x - 2, & 0 < x < 1 \\ x^2 - 6x + 8, & 1 \leq x < 5 \end{cases} \text{ dela.}$$

- Kalkulatu  $x=3$  abzisa puntuan kurbari ukitzailea den zuzenaren ekuazioa.
- Kalkulatu gorakor- eta beherako-tarteak eta mutur erlatiboak.

Sol.:  $y=-x+9$ ;  $(0, 2/5) \cup (2, 5)$  beherakorra,  $(2/5, 2) \cup (4, 5)$  gorakorra,  $x=2/5$  minimoa,  $x=4$  minimoa eta  $x=2$  maximoa

28. Izan bedi  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$  funtzioa,

- Kalkulatu asintotak.
- Kalkulatu gorakor- eta beherako-tarteak eta mutur erlatiboak.
- Egin adierazpen grafikoa.

Sol.:  $y=0$ ;  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$  gorakorra,  $(-1, 0)$  beherakorra,  $(-1, 1/e)$  maximoa,  $(1, 1/e)$  maximoa eta  $(0, 0)$  minimoa

29.  $M(0,1)$  puntutik igarotzen den,  $M$  puntuan ukitzailea  $2x-y+3=0$  zuzenari paraleloa duen eta  $f''(x)=3x^2$  betetzen duen funtzioa bila ezazu.

Sol.:  $f(x)=x^4/4+2x+1$

30. Funtzio bati buruz ezagutzen dugu  $f(1)=3$  dela eta bere deribatuaren adierazpen grafikoa



- Kalkulatu  $x=1$  abzisan ukitzailearen ekuazioa.
- Kalkulatu gorakor- eta beherakor-tarteak. Zein puntutan lortzen da maximo absolutua?
- Ikertu ahurtasuna eta ganbiltasuna.

Sol.:  $y=x+2$ ; beti gorakorra eta maximo absolutua  $x=4$  denean; ahurra  $(1, 3)$  eta ganbila  $(0, 1) \cup (3, 4)$

31.  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \frac{1}{2}x + c, & -1 < x < 0 \\ \sqrt{1-x}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$  funtzioa deribagarria da  $(-1,1)$  tartean.

- a) Kalkulatu  $c$ -ren balioa  
 b) Kalkulatu  $f'(x)$   
 c) Kalkulatu  $y=x$  zuzenari paraleloak diren zuzen ukitzailen ekuazioak.

Sol.:  $c=1$ ;  $f'(x) = \begin{cases} 4x - \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ ;  $y=x+39/32$  eta  $y=-x+5/4$



32. Izan bedi  $f(x) = e^x (\cos(x) + \sin(x))$  funtzioa,

- a) Kalkulatu gorakor- eta beherakor-tarteak.  
 b) Kalkulatu funtzioaren mutur erlatiboak eta absolutuak.

Sol.:  $(0, \pi/2) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$  gorakorra eta  $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  beherakorra;  $(\frac{\pi}{2}, e^{\pi/2})$  maximo erlatiboa,  
 $(\frac{3\pi}{2}, -e^{3\pi/2})$  minimo erlatiboa,  $(2\pi, e^{2\pi})$  maximo absolutua,  $(\frac{3\pi}{2}, -e^{3\pi/2})$  minimo absolutua

33. a) Kalkulatu  $y=x^2$  parabolari ukitzaila den zuzena eta  $4x+y+3=0$  zuzenari paraleloa dena.  
 b) Kalkulatu  $(2,0)$  puntutik igarotzen diren eta  $y=x^2$  parabolari ukitzailak diren zuzenen ekuazioak.

Sol.:  $y=-4x-4$ ;  $y=0$  eta  $y=8x-16$

34. Izan bedi  $f(x) = 2 - x|x|$  funtzioa,

- a) Ikertu  $x=0$  abzisa puntuan bere deribagarritasuna.  
 b) Kalkulatu  $x=2$  abzisa puntuan ukitzailaren ekuazioa.

Sol.: Deribagarria da;  $y=-4x+6$

35. Izan bedi  $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$  funtzioa,

- a) Kalkulatu  $x=1$  abzisa puntuan kurbari ukitzaila eta normal diren zuzenen ekuazioak.  
 b) Bilatu ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak. Badu inflexio-punturik?

Sol.:  $y=1/2(x-1)$ ;  $(-\infty, 2/3)$  ahurra,  $(2/3, \infty)$  ganbila,  $(2/3, 20/27)$  inflexio-puntua

36.  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & -1 < x < 0 \\ \frac{x^2 + a}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$  funtzioa  $(-1, \infty)$  tartean jarraitua da.

- a) Kalkulatu  $a$ -ren balioa.  $x=0$  denean deribagarria da?  
 b) Kalkulatu funtzioaren gorakor- eta beherako-tarteak.

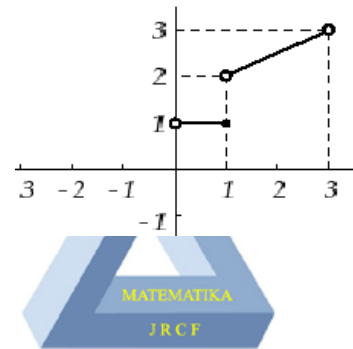
Sol.:  $a=3$ , ez da deribagarria;  $(-1,0) \cup (0,1)$  beherakorra eta  $(1, \infty)$  gorakorra

37. Ikertu  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-|x|}, & x \neq -1 \text{ eta } x \neq 1 \\ 0, & x = -1 \text{ edo } x = 1 \end{cases}$  funtzioaren deribagarritasuna.

Sol.:  $x=-1$  eta  $x=1$  denean ez da deribagarria.

38. Jatorriarekiko simetrikoa den eta  $(-3,3)$  tartean definituta dagoen funtzioaren zati bat ondoko grafikoan agertzen da
- Kalkulatu, arrazoituz,  $f(0)$
  - Osatu  $f(x)$ -ren adierazpen grafikoa.
  - Kalkulatu  $f'(x)$ , existitzen denean.

$$\text{Sol.: } f(0)=0; \dots; f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -3 < x < -1 \\ 0, & -1 < x < 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x < 3 \end{cases}, \quad x=0, x=-1 \text{ eta}$$



$x=1$  direnean ez da deribagarria.

39.  $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$  funtzioak ondokoak betetzen ditu:  $f(0)=4$ ,  $(1,2)$  inflexio-puntua da eta  $x=0$  abzisa puntuan ukitzile horizontala du. Kalkulatu  $a$ ,  $b$ ,  $c$  eta  $d$ .

*Sol.:  $a=1$ ,  $b=-3$ ,  $c=0$  eta  $d=4$*

40.  $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$  funtzioak ondokoak betetzen ditu: bere deribatua zero da  $x=1$  denean, baina ez da mutur erlatiboa eta  $f(1)=1$  da. Kalkulatu  $a$ ,  $b$  eta  $c$ -ren balioak.

*Sol.:  $a=-3$ ,  $b=3$  eta  $c=0$*

41.  $f(x)$  funtzio bat deribagarria da bere izate-eremuan  $(0,3)$ ,  $f(1)=0$  da eta bere funtzio deribatua  $f'(x) = \begin{cases} x-1, & 0 < x \leq 2 \\ -x+3, & 2 < x < 3 \end{cases}$  da. Kalkulatu funtzioaren adierazpen analitikoa.

$$\text{Sol.: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} - x - \frac{7}{2}, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

42. Izan bedi  $f(x) = \begin{cases} |2-x|, & x < a \\ x^2 - 5x + 7, & x \geq a \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}$  funtzio jarraitua.

- Kalkulatu  $a$ -ren balioa
- Kalkulatu  $f'(x)$

$$\text{Sol.: } a=3; f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ 1, & 2 < x < 3 \\ 2x-5, & x \geq 3 \end{cases}$$

43. Izan bedi  $f(x)=(x+3)e^{-x}$  funtzioa,
- Kalkulatu asintotak
  - Kalkulatu mutur erlatiboak eta inflexio-puntuak.
  - Egin adierazpen grafikoa.

*Sol.:  $y=0$ ;  $(-2, e^2)$  maximoa,  $(-1, 2e)$  inflexio-puntua*

44. Izan bedi  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \leq 1 \\ 2 - x^2, & x > 1 \end{cases}$  funtzioa,

a) Kalkulatu, posible bada,  $x=1$  abzisaren alboko deribatuak.

b) Kalkulatu funtzioaren gorakor- eta beherakor-tarteak.

Sol.:  $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ -2x, & x > 1 \end{cases}$ ;  $x > 1$  gorakorra,  $0 \leq x \leq 1$  beherakorra



45. Izan bedi  $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x + 2}$ ,  $x \neq -2$  funtzioa,

a) Kalkulatu bere asintotak.

b) Eztabaidatu funtzioaren posizio erlatiboa asintotekiko.

Sol.:  $x = -2$  eta  $y = 2x - 4$ ;  $x > -1$  zuzenaren goitik,  $x < -1$  zuzenaren azpitik

46. Funtzio baten funtzio deribatua ondokoa da

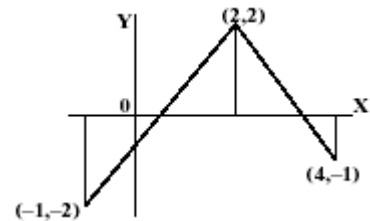
a) Ikertu gorakor- eta beherakor-tarteak.

Kalkulatu bere mutur erlatiboak.

b) Ikertu ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak.

Inflexio-punturik badu?

Sol.:  $(1/2, 10/3)$  gorakorra,  $(-1, 1/2) \cup (10/3, 4)$  beherakorra;  $(2, 4)$  ahurra eta  $(-1, 2)$  ganbila



47. Ikertu  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3 + x^2} - x, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{x^2}{4}, & x > 1 \end{cases}$  funtzioaren deribagarritasuna.

Sol.:  $(0, \infty) - \{1\}$  deribagarria

48.  $f(x) = \begin{cases} 3ax + b, & x \geq 0 \\ e^{x(ax+b)}, & x < 0 \end{cases}$  funtzioa deribagarria izan daiten, kalkulatu a eta b-ren balioak.

Sol.:  $a = 1/3$  eta  $b = 1$

49. Ikertu  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$  funtzioaren deribagarritasuna.

Sol.:  $121/8 \ u^2$

50.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < 0 \\ 1 - mx - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$  funtzioa deribagarria bada, kalkulatu m-ren balioa.

Sol.:  $m = -1$

51. Izan bedi  $f(x) = \begin{cases} x^x, & x < 2 \\ |x - 5|, & 2 \leq x < 10 \end{cases}$  funtzioa,

a) Kalkulatu a-ren ( $a > 0$ ) balioa funtzioa jarraitua izan dadin.

b) Egin adierazpen grafikoa.

c) Ikertu deribagarritasuna.

Sol.:  $a = 3$ ; ...;  $x = 2$ ,  $x = 5$  denean ez da deribagarria.

52. Kalkulatu a eta b,  $f(x) = \begin{cases} ax + 5x^2, & x \leq 2 \\ \frac{a}{x} + bx, & x > 2 \end{cases}$  funtzioa deribagarria izan daiten.

Sol.:  $a = -20$  eta  $b = -5$

53. Objektu bat puntu finko batetatik eta bertikalki jaurtitzen da. t segundu igaro ondoren altuera  $h(x) = 5 - 5t - 5e^{-2t}$  funtzioak ematen du.

a) Zenbat denbora igaro da altuera maximoa lortu arte? Zein da altuera?

b) Kalkulatu abiadura 2 segundu igaro ondoren.

Sol.:  $0,767 \text{ min}$ ;  $-4,9999 \text{ m/s}^2$



54. Izan bedi  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  funtzioa,

a) Bilatu  $x=0$  abzisa puntuan alboko limiteak.  $x=0$  abzisa jarraitua da?

b) Kalkulatu  $x=1$  abzisa denean bere deribatuaren balioa.

Sol.:  $0^+ \rightarrow 0$  eta  $0^- \rightarrow 1$ , ez da jarraitua;  $f'(1) = \frac{e}{(1+e)^2}$

55. Ikertu  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}, & x \leq -2 \\ 0, & -2 < x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}, & 1 < x \end{cases}$  funtzioaren deribagarritasuna.

Sol.:  $x = -2$  denean ez da deribagarria.

56. Izan bedi  $f(x) = \cos(x) + kx$  funtzioa,

a) Kalkulatu k-ren balioak funtzioa bere definizio-eremuan gorakorra izan daiten.

b)  $k=1$  denean, kalkulatu  $x=0$  abzisa puntuan funtzioari ukitzailea den zuzenaren ekuazioa.

Sol.:  $k \geq 1$ ;  $y = x + 1$

57.  $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x}, & x > 0 \end{cases}$  funtzioa deribagarria da  $x=0$  abzisa puntuan?

Zeintzuk dira b eta c-ren balioak?

Sol.: Deribagarria;  $b = -1/2$  eta  $c = 1$

58.  $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x < 1 \\ cx, & 1 \leq x \end{cases}$  funtzioa bere izate-eremuan deribagarria da eta  $x=0$

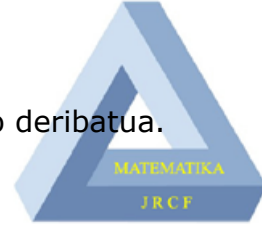
eta  $x=4$  abzisa puntuetan balio bera hartzen du. Kalkulatu a, b eta c.

Sol.:  $a = -7/4$ ,  $b = 1$  eta  $c = 1/4$

59. a) Bilatu  $f(x)$  funtzioa jakinda  $f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ x, & x > 3 \end{cases}$  eta  $f(3) = 9/2$

b) Funtzioa  $x=3$  abzisa puntuan deribagarria da?

$$\text{Sol.: } f(x) = \begin{cases} 9/2, & x < 3 \\ x^2/2, & x > 3 \end{cases}$$



60. Kalkula ezazu  $f(x) = |x-2| + \sqrt{x-1}$  funtzioaren funtzio deribatua.

$$\text{Sol.: } f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & x > 2 \\ -1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}}, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

61.  $f(x)$  funtzia  $\mathbb{R}$  osoan deribagarria da eta  $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - (a+3)x + 3a}{x-3}, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$  da.

a) Zein da  $a$ -ren balioa?

b) Kalkulatu, arrazoituz,  $f'(3)$

$$\text{Sol.: } a=2; f'(3)=1$$

62. Funtzio bati buruz egindako baieztapenetatik, zeintzuk IZAN BEHAR dute egiazkoak, zeintzuk IZAN DAITZESKE batzutan egia edo INOIZ egia? Arrazoiu erantzunak. Erantzuna IZAN DAITEKE bada, jarri adibide bat egia denean eta beste bat gezurra denean.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  bada eta  $f(x)$  jarraitua, orduan  $f(0) = 1$  da.

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$  bada,  $f'(0) = 3$  da.

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3$  bada,  $x=0$  abzisa puntuan kurbari ukitzailea den zuzena  $y=3x+1$  da.

$$\text{Sol.: INOIZ; EGIA; IZAN DAITEKE (1996)}$$

63.  $f(x) = \begin{cases} ax+5, & x \leq 1 \\ a\sqrt{x} + \frac{b}{x}, & x > 1 \end{cases}$  funtzioa deribagarria da. Kalkulatu  $a$  eta  $b$

$$\text{Sol.: } a=-10 \text{ eta } b=5$$

64. Izan bedi  $f(x)$  funtzio deribagarri bat. Jakina da  $f'(x)$  jarraitua dela eta

- $f'(0)=0, f'(2)=1, f'(3)=0, f'(4)=-1, f'(5)=0$
- $f'(x)$  gorakorra  $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$  tartean
- $f'(x)$  beherakorra  $(2, 4)$  tartean
- $y=2x+3$  zuzena  $f'(x)$ -ren asintota  $x \rightarrow \infty$ 
  - a) Egin bere adierazpen grafikoa.
  - b)  $f(x)$  funtzioak  $x$ -ren zein balioetan lortzen ditu bere maximoak eta minimoak?

$$\text{Sol.: } x=3 \text{ maximoa eta } x=0 \text{ eta } x=5 \text{ minimoa}$$

65.  $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 \leq x < 2 \\ c + \sqrt{x-1}, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$  funtzioa (0,5) tartean deribagarria da eta

$f(0)=f(5)$ . Kalkulatu a, b eta c.

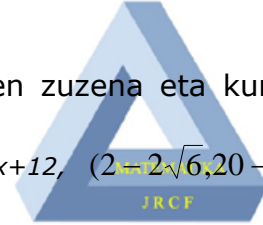
Sol.:  $a=-3/2, b=1/2$  eta  $c=-2$

66. Izan bedi  $f(x)=|8-x^2|$  funtzioa,

a) Kalkulatu mutur erlatiboak.

b) Kalkulatu  $x=-2$  abzisan funtzioari ukitzailea den zuzena eta kurbaren arteko ebaki-puntuak.

Sol.:  $(-\sqrt{8},0)$  eta  $(\sqrt{8},0)$  minimoa,  $(0,8)$  maximoa;  $y=4x+12$ ,  $(2-2\sqrt{6},20-8\sqrt{6})$ ,  $(2+2\sqrt{6},20+8\sqrt{6})$  eta  $(-2,4)$



67. Izan bedi  $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$  funtzioa,

a) Kalkulatu asintotak.

b) Kalkulatu gorakor- eta beherakor-tarteak. Kalkulatu mutur erlatiboak.

Sol.:  $y=1$ ;  $1 < x < -1$  beherakorra eta  $-1 < x < 1$  gorakorra, minimoa  $(1, e^{-1})$  maximoa  $(1, e)$

68. Izan bedi  $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$  funtzioa,

a) Kalkulatu  $x=1$  abzisan kurbari ukitzailea eta normala diren zuzenen ekuazioak.

b) Kalkulatu ahurtasun- eta ganbiltasun-tarteak. Badu inflexio-punturik?

Sol.:  $y=-2x+2$  eta  $y=1/2(x-1)$ ; ahurra  $x < 2/3$  eta ganbila  $x > 2/3$

69. Izan bedi  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ ax^3 + bx, & -1 < x < 2 \\ 11x - 16, & 2 \leq x \end{cases}$  funtzioa,

a) Kalkulatu a eta b  $f(x)$  funtzioa beti jarraitua izan dadin.

b) Ikertu bere deribagarritasuna

c) Egin adierazpen grafikoa.

Sol.:  $a=1$  eta  $b=-1$ ;  $x=-1$  denean ez da deribagarria eta  $x=2$  denean bai.

70. Izan bedi  $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1), & x > 1 \\ 2x^2 + ax + b, & x \leq 1 \end{cases}$  funtzioa,

a) Kalkulatu a eta b-ren balioak funtzioa jarraitua bada eta jatorritik igarotzen bada.

b) Ikertu deribagarritasuna.

c) Kalkulatu zein puntutan den kurbari ukitzailea abzisa ardatzari paraleloa.

Sol.:  $a=-3$  eta  $b=0$ ;  $x=1$  denean deribagarria;  $P(3/4, -9/8)$

71. Kalkulatu a, b eta c-ren balioak  $f(x)=x^2+ax+b$  eta  $g(x)=x^3+c$  kurben grafikoak (1,2) puntutik igaro daitezen eta puntu horretan ukitzaile bera izan dezaten.

Sol.:  $a=1, b=0$  eta  $c=1$

72. Izan bitez  $f(x)=\log(x)-b$  eta  $g(x)=a\sqrt{x}+b$  funtzioak (log, logaritmo nepertarra adierazten du),

a) Kalkulatu a eta b-ren balioak bi funtzioak  $x=1$  abzistatik igarotzean ukitzaileak izan daitezen.

b) Kalkulatu zein puntuetan anulatzen den funtzioetariko bakoitza.

c) Kalkulatu  $h(x)=f(x) \cdot g(x)$  funtzioaren definizio-eremua.

Sol.:  $a=2, b=-1; f(x) (1/10,0)$  eta  $g(x) (1/4,0); D=(0,\infty)$

73. a) Enuntziatu Lagrange-ren batez besteko teorema.  
 b) Froga ezazu ea  $f(x)=2x+\sin(x)$  funtzioak Lagrange-ren teorema betetzen badu. Erantzuna baiezkoa bada, kalkulatu teorema betetzen duten puntuak.  
 Sol.:  $x=\pi/2$  eta  $x=3\pi/2$  denean

74. Izan bedi  $f(x)=x+\frac{4}{(x-1)^2}$  funtzioa,

- a) Kalkulatu definizio-eremua eta asintotak.  
 b) Kalkulatu maximo eta minimo erlatiboak eta gorakor- eta behekor-tarteak.  
 c) Egin adierazpen grafikoa.

Sol.:  $R-\{1\}, x=1, y=x; x>3$  gorakorra,  $1<x<3$  beherakorra, minimoa  $x=3$  denean



75. Izan bedi  $f(x)=\begin{cases} x^3-12x+1, & 0\leq x\leq 1 \\ ax^2+bx+c, & 1<x\leq 2 \end{cases}$  funtzioa,

- a) Kalkulatu a, b eta c Rolle-ren teorema aplikatu ahal izateko.  
 b) Bilatu teorema betetzen duten x-ren balioak.

Sol.:  $a=20, b=-49$  eta  $c=19; x=49/40$

76. Kalkulatu bigarren deribatua  $f''(x)=x e^x$  duten funtzio guztiak. Horietatik, bilatu  $(0,2)$  eta  $(2,0)$  puntuetatik igarotzen dena.

Sol.:  $f(x)=x e^x-2e^x+kx+m; f(x)=x e^x-2e^x-2x+4$

77. Izan bedi  $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x<0 \\ ax^3-\frac{3}{2}x^2+bx+c, & 0\leq x\leq 2 \\ -x^2+d(x-1), & x>2 \end{cases}$  funtzioa,

- a) Kalkulatu, arrazoituz, a, b, c eta d-ren balioak  $f(x)$  funtzioa jarraitua eta deribagarria izan dadin.  
 b) Egin  $f'(x)$  eta  $f''(x)$  funtzioen adierazpen grafikoa.

Sol.:  $a=1/2, b=2, c=0$  eta  $d=6$

78. Izan bedi  $f(x)=-x+1-\sqrt{x^2-3}$  funtzioa,

- a) Kalkulatu definizio-eremua.  
 b) Kalkulatu kurbako puntuak non ukitzaileak  $x-y=0$  zuzenari paraleloak diren.  
 c) Kalkulatu kurbaren asintotak

Sol.:  $(-\infty,-\sqrt{3})\cup[\sqrt{3},\infty); P=(-2,2)$  eta  $Q=(2,-2); y=1 (-\infty)$  eta  $y=-2x+1 (+\infty)$

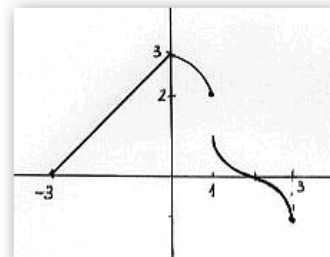
79.  $f(x)=e^x \sin(x)$  funtzioa  $[0,2\pi]$  tartean definitua dago. Kalkulatu bere mutur erlatiboak eta inflexio-puntuak.

Sol.: maximoa  $x=3\pi/4$  eta minimoa  $x=7\pi/4$ , inflexioa  $x=\pi/2$  eta  $x=3\pi/2$  denean.

80.  $[-3,3]$  tartean definitutako  $f(x)$  funtzioaren adierazpen grafikoa ematen da:

- a) Ikertu bere jarraitasuna  
 b) Ikertu bere deribagarritasuna  
 c) Egin  $f'(x)$  funtzioaren adierazpen grafikoa.

Sol.:  $x=1$  denean ez da jarraitua,  $x=1$  eta  $x=0$  denean ez da deribagarria

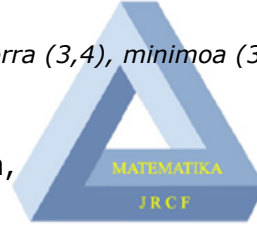


81. Izan bedi  $y = x + \frac{4}{(x-1)^2}$  funtzioa,

- Kalkulatu definizio-eremua eta asintotak.
- Bilatu gorakor- eta beherakor-tarteak eta maximo eta minimo erlatiboak.
- Egin funtzioaren adierazpen grafikoa.

Sol.:  $R - \{1\}$ ,  $x=1$  eta  $y=x$ ; gorakorra  $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$  eta beherakorra  $(3, 4)$ , minimoa  $(3, 4)$

82. Izan bedi  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 0 \\ ax^3 - \frac{3}{2}x^2 + bx + c, & 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + d(x-1), & x > 2 \end{cases}$  funtzioa,



- Bilatu, arrazoituz, a, b, c eta d-ren balioak f(x) funtzioa R osoan jarraitua izan dadin.
- Egin  $f'(x)$  eta  $f''(x)$  funtzioen adierazpen grafikoa.

Sol.:  $\frac{1}{2}, 2, 0, 6$

83. Izan bedi  $f(x) = -x + 1 - \sqrt{x^2 - 3}$  funtzioa,

- Bilatu definizio-eremua.
- Kalkula ezazu zein puntu (puntuatan) funtzioaren zuzen ukitzailea  $x - y = 0$  zuzenari paraleloa den.
- Kalkulatu bere asintotak.

Sol.:  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ ;  $P(-2, 2)$  eta  $Q(2, -2)$ ;  $y = -2x + 1$  asintota

84.  $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos(x), & x \leq 0 \\ 2(a+x), & 0 < x < 1 \\ \frac{b}{x^2}, & x \geq 1 \end{cases}$  funtzioa izanik, kalkulatu a eta b funtzioa jarraitua

izan dadin.

Sol.:  $a=1, b=4$

85.  $f(x) = \cos(x)$  eta  $g(x) = \sin(x)$  funtzioek betetzen dute Cauchy-ren batezbesteko teorema  $[0, \pi/2]$  tartean? Baiezkoan, zein balioerentzat betetzen da?

Sol.: Bai,  $c = \pi/4$

86. Enuntziatu Rolle-ren teorema. Kalkulatu a, b eta c-ren balioak

$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \leq 3 \\ bx + c, & x > 3 \end{cases}$  funtzioak  $[-1, 7]$  tartean Rolle-ren teorema bete dezan.

Sol.:  $a=-4, b=2, c=-9$ ;  $x=2$  denean betetzen da teorema

87.  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  funtzioak  $(1, 0)$  puntuan ukitzaile horizontala du eta  $(-1, -32)$  inflexio-puntua da.

- Bilatu f(x) funtzioa.
- Kalkulatu bere maximo eta minimo erlatiboak.

Sol.:  $f(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 17x - 8$ ;  $x=1$  denean maximoa eta  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{273}}{8}$  denean minimo erlatiboa

88.  $f(x) = \left( \frac{3x^2 + x}{3x^2} \right)^{ax+2}$  funtzioaren asintota horizontala  $y=2$  bada, kalkulatu  $a$ .

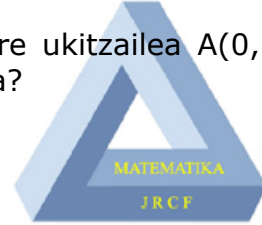
*Sol.:*  $a = 3 \ln(2)$

89. Enuntziatu Lagrange-ren batezbesteko balioaren teorema. Zen da bere esanahi geometrikoa.

a)  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  funtzioaren zein puntutan da bere ukitzailea  $A(0,1)$  eta  $B(1,-1)$  puntuak lotzen dituen zuzenari paraleloa?

b) Bilatu zuzen ukitzailearen ekuazioa.

*Sol.:*  $\left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-8 + 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \right); \quad y - \frac{-8 + 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = -2 \left( x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$



90. Begira eazazu ez  $f(x) = |x+1|$  funtzioak  $[-2,0]$  tartean Rolle-ren teorema betetzen duen. Arrazoitu erantzuna.

*Sol.:* Ez du betetzen.

91. Enuntziatu Bolzano-ren teorema.

Froga ezazu  $e^{-x} + 2x - 1 = 0$  ekuazioak  $[-2,-1]$  tartean soluzioa duela.

*Sol.:*

92. Izan bedi  $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + 5}{x^2 - c}$  funtzioa,

a) Kalkulatu  $a$ ,  $b$  eta  $c$  jakinda  $x=2$  eta  $y=3x+2$  bere asintotak direla.

b)  $f(x)$  funtzioak badu beste asintotarik? Egiazkoan, kalkulatu.

*Sol.:*  $a=3, b=2, c=4; x=-2$

93.  $f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 \leq x < 2 \\ c + \sqrt{x-1}, & 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$  funtzioa  $(0,5)$  tartean deribagarria da eta, gainera,

$f(0) = f(5)$ . Kalkulatu  $a$ ,  $b$  eta  $c$

*Sol.:*  $a=-3/2, b=1/2$  eta  $c=-2$

94.  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  funtzioari buruz zera esagutzen da:  $x=-1$  denean maximoa duela, bere kurbak abzisa ardatza  $x=-2$  abzisan ebakitzen duela,  $x=0$  denean inflexio-puntua duela eta  $x=2$  abzisa puntuan ukitzailearen malda 9 dela. Kalkulatu  $a$ ,  $b$ ,  $c$  eta  $d$ .

*Sol.:*  $a=1, b=0, c=-3$  eta  $d=2$