

1. Kurbak eraikitze oinarriko elementuak

Ohizko arazoaren planteamenduan askotan erabiltzen dira gertaerak deskribatzen dituzten funtzio matematikoak optimizatu behar direnak. Horretarako, funtzioaren puntu bereziak ikertzen hasten da eta puntu horien goranzko eta beheranzko joerak aztertzen dira esparru zehatz baten barnean.

1.1. Definizio eremua (D)

Funtzio bat aztertzeke, egin ohi den lehenengo gauza **definizio eremua** zehaztea da, hau da, funtzioak balio erreala izateko aldagaiak hartu behar dituen balioen multzoa.

Funtzioaren balioak errealak egiten dituzten x-en balio guztien multzoari, definizio eremua deitzen zaio.

Funtzio polinomikoen izate eremua \mathbb{R} osoa da.

Zatiki polinomikoen izate eremua $\mathbb{R} - \{\text{izendatzailea}=0\}$ balioak dira.

Erro bikoitien izate eremua $\mathbb{R} - \{\text{errotzailea}<0\}$ balioak dira.

Erro bakoitien izate eremua \mathbb{R} osoa da.

Logaritmoen izate eremua $\mathbb{R} - \{h(x) \leq 0\}$ balioak dira.



1.2. Simetriak

$f(-x) = -f(x)$ betetzen bada, *jatorriarekiko* simetria du.

$f(-x) = f(x)$ betetzen bada, *ordenatu ardatzarekiko* simetria du.

Beste simetria mota batzuk zehazteko, erreferentzi sistemaren ardatzen **biraketak** eta **translazioak** egin daitezke, dagokien noranzkoan.

1.3. Periodikotasuna

Funtzio bat periodikoa izango da, aldagaiaren balioaren tarte finkoetan errepikatzen bada, hau da, $f(x) = f(x + P) = f(x - P) = f(x + -P) = f(x - 2P) = \dots$ bada, **P** funtzioaren periodoa izanik.

1.4. Asintotak

Horizontala: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$ betetzen bada, $y=L$ da asintota horizontala. Asintota mota hau ez badu, zeharra izan dezake. Asintota mota hau badu ez du zeharrik.

Bertikalak: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ betetzen bada, $x=a$ da asintota bertikala. Laburki esan da, izate eremutik "kendutako" puntuetan asintota bertikalak daude.

Zeharra: $y = mx + h$ zuzenak dira non

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{eta} \quad h = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

1.5. Ebaki puntuak

Ardatzekin

Funtzio batek ardatz horizontalarekin duen ebakidura $f(x) = 0$ eginez eta ondoriozko ekuazioa ebatziz zehazten da.

Ardatz bertikalarekiko ebakidura aldagai askeak baliogabetzen duen $y = f(x)$, funtzioaren balioa kalkulatu eta lortuko da.

Asintotekin (horizontala edo bertikala)

$y=f(x)$ eta $y=zuzena$ osatutako sistemak soluziorik badu, kurba asintota ebakitzen du bilatutako puntuan.

1.6. Gorakortasuna, beherakortasuna

$f'(x) > 0$ egiten duten x -en balioentzat funtzioa gorakorra da.

$f'(x) < 0$ egiten duten x -en balioentzat funtzioa beherakorra da.



1.7. Maximo eta minimo erlatiboak

Beharrezko baldintza: $f'(x) = 0$ izatea. Ekuazio honetatik x_i balioak ateratzen dira.

Baldintza nahikoa:

$f''(x_i) < 0$, $(x_i, f(x_i))$ puntuan maximo erlatibo bat du.

$f''(x_i) > 0$, $(x_i, f(x_i))$ puntuan minimo erlatibo bat du.

1.8. Ahurtasuna, ganbeltasuna

$f''(x) > 0$ egiten duten x -en balioentzat funtzioa ahurra da.

$f''(x) < 0$ egiten duten x -en balioentzat funtzioa ganbila da.

1.9. Inflexio puntuak

Beharrezko baldintza: $f''(x) = 0$ izatea. Ekuazio honetatik x_j balioak ateratzen dira.

Baldintza nahikoa: $f^{(2n+1)}(x_j) \neq 0$ bada, $(x_j, f(x_j))$ puntuan inflexio puntua du.

1.10. Limiteen kalkulua

Aurreko informazioen bat ez dagoenean eta kurba lotzeko zerbait faltatzen denean, beharrezkoa izan daiteke limiteen bat kalkulatzeko. Kasu kasuko limitea kalkulatu behar da.

2. Adibide praktikoa.

Aztertu eta adierazi $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ funtzioa.

- Izate eremua: $D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- Simetriak: $f(-x) = -f(x)$, jatorriarekiko simetria du.
- Asintotak:
Bertikalak $x = -1$ eta $x = 1$
Zeiharra: $y = x$
- Ardatzekin ebaki puntuak: $(0, 0)$
- Gorakortasuna: $f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} > 0$ denean, hau da, $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ eta beherakorra $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$



- Maximo eta minimoak:

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$$

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$

$$f''(-\sqrt{3}) < 0 \rightarrow \text{Maximoa du } \left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ puntuan.}$$

$$f''(0) = 0, f'(0^-) < 0 \text{ eta } f'(0^+) < 0 \rightarrow \text{Inflexioa du } (0, 0) \text{ puntuan.}$$

$$f''(\sqrt{3}) > 0 \rightarrow \text{Minimoa du } \left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ puntuan.}$$

- Ahurtasuna: $f''(x) > 0$ denean; hau da, $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ eta ganbila $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
- Inflexio puntua

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f'''(x) = \frac{-6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4} \quad f'''(0) \neq 0, \text{ beraz, } (0, 0) \text{ puntuan inflexio puntua du.}$$

