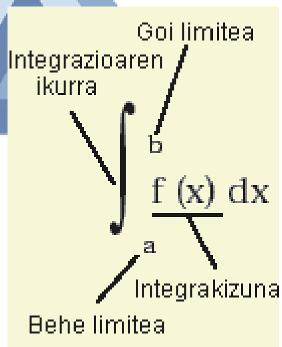
1. Integral mugatuko kontzeptua

Integral mugatua kurbek eta zuzenek mugatutako arloen balioa zehazteko erabiltzen den kontzeptua da. [a, b] tartea egonda (tarte horren x puntu bakoitzerako, 0 baino handiagoa edo berdina den f (x) funtzio bat zehazten da [a, b] tartean), a eta b puntuen arteko funtzioaren integral mugatua izango da funtzioak, OX ardatz horizontalak eta x = a eta x = b ekuazioen zuzen bertikalek mugatutako planoaren neurriaren arloa.

[a, b] tartearen muturren arteko funtzioaren integral mugatua honela adierazten da:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



1.1. Kurba baten azpiko azalerara hurbildu

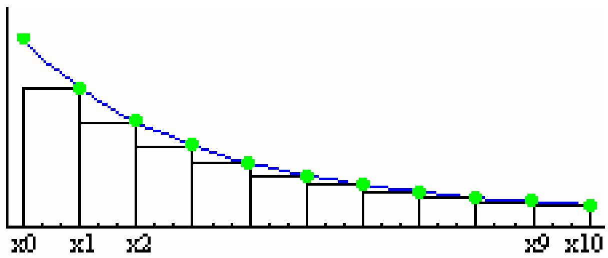
Negatiboak ez diren balioak hartzen dituen y=f(x) kurba baten ekuazioa ezagutzen badugu, nola kalkulatuko dugu kurbaren, X ardatzaren eta x=a eta x=b, bi abzisaren artean dagoen azalera?

Oso lagungarria izaten da [a,b] tartetan zatitzea eta azalera hurbiltzen joatea.

Har dezagun [a,b] tartea eta 10 tartetan zatitu dezagun (tarteak ez dute berdinak izan behar)

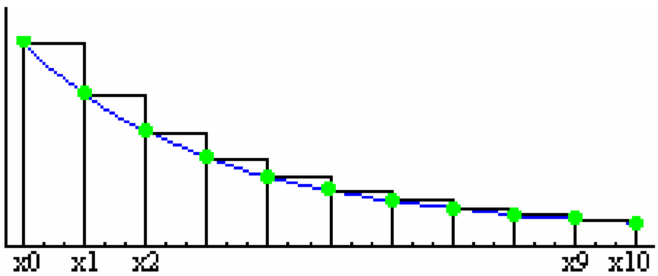
$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_9<x_{10}=b$

m_i bada funtzioak $|x_{i-1}, x_i|$ tartean hartzen duen balio txikiena, kurbaren azpitik dauden laukizuzenen behe-azalera honako hau da:



$$s=\sum_{i=1}^{10} m_i\cdot(x_i-x_{i-1})=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_{10}(x_{10}-x_9)$$

Goikoak ematen duen azalera, bila gabiltzan azalera baino txikiagoa (edo, gehienez, berdina) da.



M_i bada funtzioak $\left|x_{i-1}, x_i\right|$ tartean hartzen duen balio handiena, laukizuzenen goi-azalera honako hau da:

$$S=\sum_{i=1}^{10} M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_{10}(x_{10} - x_9)$$

Intuitiboki argi ikusten da, [a,b] tartea tarte gehiagotan zatitzen bada, goi-azaleren eta behe-azaleren batura kalkulatu nahi den azaleratik gero eta hurbilago dagoela.

1.2. Funtzio jarraitu baten integrala

Y=f(x) funtzio jarraitua da [a,b] tartean eta $f(x)\geq 0$ betetzen du, f(x)-ren grafikoaren, abzisa ardatzaren eta x=a eta x=b abzisen arteko azalerari $\int_a^b f(x)dx$ esango diogu eta f-ren a eta b arteko integrala irakurriko dugu.
Azalera hori kalkulatzeko tartea n zati desberdinetan zatituko dugu (partiketa bat egingo dugu)
$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ puntu bilduma bakoitzari [a,b]-ren **partiketa** esango diogu. X_i-x_{i-1} distantziarik handienari partiketaren **diametroa** esango diogu.
[a,b]-ren partiketa ($\mathscr{P}$) bakoitzari defektuz lortutako s azalera bat eta gehiegitaz lortutako S azalera bat lotuko dizkiogu.

$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \qquad \text{eta} \qquad S=\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3, \ldots, \mathscr{P}_k, \ldots$ partiketa segida bat badugu, segida horri bi azalera segida dagozkio.
$s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$ defektuzko azalerak
$S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots$ gehiegitazko azalerak
Partiketen diametroek 0ra jotzen badute, diferentziek ere zerora jotzen dute:
S_1-s_1,S_2-s_2,...,S_k-s_k,... zerora jotzen dute. Beraz, segida biak bila gabiltzan azalerarantz jotzen dute.

$$s_k \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S_k \quad \text{eta} \quad S_k - s_k \to 0$$

Adibidea
Izan bedi [-1,2] tartean definitua den $f(x)=1+x^2$ funtzioa. Kontsidera dezagun ondiko partiketa: $\mathscr{P}$={-1; -0,5; 1; 1,5; 2}. Bilatu partiketa horri dagozkion goi eta behe baturak.

Tartea	Minimoa	Maximoa	Luzera
[-1; -0,5]	1,25	2	0,5
[-0,5; 1]	1	2	1,5
[1; 1,5]	2	3,25	0,5
[1,5; 2]	3,25	5	0,5

s=0,5·1,25+1,5·1+0,5·2+0,5·3,25=4,75
eta
S=0,5·2+1,5·2+0,5·3,25+0,5·5=8,125

2. Integralaren propietateak

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ da, f(x) edozein dela ere.
- F(x)>0 bada eta [a,b] tartean jarraitua bada, orduan, $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, eta f(x)<0 bada [a,b] tarte osoan, orduan, $\int_a^b f(x)\,dx < 0$
- a<b<c bada eta f(x) jarraitua bada [a,b] tartean, orduan,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx$
- $c \cdot \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c \cdot f(x)\,dx$
- f(x) funtzio jarraitua bada [a,b] tartean, orduan, honakoa betetzen duen $c \in [a,b]$ zenbaki bat existitzen da: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a)$ (Kalkulu integralaren batez besteko balioaren teorema esaten zaio)

3. Barrow-en erregela

f(x) jarraitua bada [a,b] tartean eta G(x) bere jatorrizko bat bada, orduan

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Integral mugatuaren aplikazioak

4. Irudi lauen azaleren kalkulua

Aurreko ataletan ikusi den bezala, y=f(x9 kurbak, abzisa ardatzak eta x=a eta x=b zuzenek mugatzen duten barrutiaren azalera ondoko formularen bidez kalkulatzen da:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Nola erabili formula hori kasu desberdinetan.

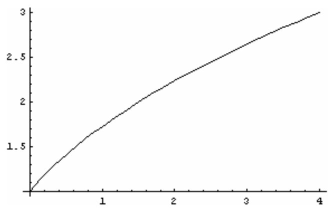
4.1. Funtzioaren balio guztiak positiboak direnean.

Azalera kalkulatu behar den tartean funtzioaren balio guztiak positiboak direnean, formula zuzenean aplikatzen da.

Adibidea-1

Kalkula ezazu $f(x) = \sqrt{2x+1}$ *funtzioak, abzisa ardatzak eta, x=0 eta x=4 zuzenek mugatzen duten barrutiaren azalera*.

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \ldots = \frac{26}{3}u^2$$

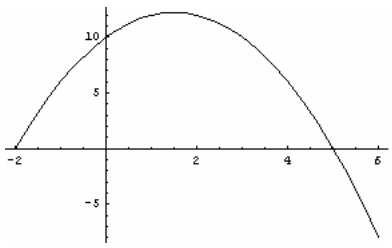


Adibidea-2

Kalkula ezazu f(x)=-x²+3x+10 parabolak eta abzisa ardatzak mugatzen duten barrutiaren azalera.

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -x^2 + 3x + 10 \end{cases} \qquad x = -2 \text{ eta } x = 5$$

$$\int_{-2}^{5} (-x^2 + 3x + 10)\,dx = \ldots = \frac{875}{6}u^2$$



4.2. Funtzioaren balio guztiak ez direnean positiboak

$f(x) \le 0, \ \forall x \in [a,b]$

Funtzioaren adierazpen grafikoa abzisa ardatzaren azpi aldean izango da eta $\int_a^b f(x)\cdot dx$ integrala kalkulatzerakoan, zenbaki negatibo bat lortzen da eta ezin da izan barrutiaren azalera, zeren azalera negatiboak ez baitu zentzurik. Oztopo hau gainditzeko, zera egiten da:

Kontsidera dezagun g(x) funtzioa, non $\forall x \in [a,b]$ g(x) = - f(x) den. Horrela abzisa ardatzarekiko g(x)-ren grafikoa f(x)-enaren simetrikoa da eta g(x) funtzioak definitzen duen barrutiaren azalera f(x)-ek definitzen duenaren berdina da. Beraz,

$$A = \int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_a^b f(x)\cdot dx = \left|\int_a^b f(x)\cdot dx\right| = \int_b^a f(x)\cdot dx$$

Adibidea-1

Kalkula ezazu [-2, 2] tartean y= -x^2 funtzioak definitutako barrutiaren azalera.

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(-x^2)\,dx\right|=-\int_{-2}^{2}(-x^2)\,dx=\int_{2}^{-2}(-x^2)\,dx=\ldots=\frac{16}{3}\,u^2$$

4.3. Funtzioa c∈(a,b) puntuan anulatu eta ikurrez aldatzen denean.

Honela bada, f(x)-ek, abzisa-ardatzak eta x=a eta x=b zuzenek mugatzen duten barrutia bi zatitan banatzen da; bata plano-erdi positiboan eta bestea plano-erdi negatiboan aurkitzen direlarik. Hau dela eta azalera honela kalkulatuko litzateke. Suposa dezagun f(x)≥0 dela [a,c] tartean eta f(x)≤0 dela [c,b] tartean. Orduan azalera honako espresioak emango luke:

Adibidea-1

Kalkula ezazu [0,2п] tartean y=sin x funtzioak definitutako barrutiaren azalera. (E: 4 u^2)

Adibidea-2

Kalkula ezazu y=x^3-16x funtzioak eta abzisa ardatzak mugatzen duten barrutiaren azalera. (E: 128 u^2)

4.4. Bi grafikoen arteko azalera.

Izan bitez [a,b] tartean jarraituak diren f(x) eta g(x) funtzioak, non $\forall x\in[a,b]\quad f(x)\le g(x)$ den.

g(x) eta f(x) funtzioak eta x=a eta x=b zuzenek definitzen duten barrutiaren azalera hauxe da:

$$A=\int_a^b[g(x)-f(x)]\cdot dx$$

Adibidea-1

Kalkula ezazu funtzioek mugatzen duten barrutiaren azalera. (E: $\frac{125}{15}u^2$)

Adibidea-2

Kalkula ezazu y=x^2 eta $y=\sqrt{x}$ *funtzioek mugatzen duten barrutiaren azalera.*

(E: $\frac{1}{3}u^2$)

Adibidea-3

Kalkula ezazu y=x^3 kurbak eta y=2x zuzenak mugaturiko barrutiaren azalera. (E: 2 u^2)