

1. Integral mugagabea.

Integral mugagabearen ideia aurrerapauso bat izan zen matematika modernoek hasitako abstrakzio bidean. Horri esker, integrala jada ez zen bakarrik erabiltzen kurbek eta zuzenek osatutako arloak zehazteko eta berezko funtzioaren izaera hartu zuen, horrela ekuazioetan eta ereduak deskribapenetan agertzen zen analisi matematikoaren teorien esparru zabalaren barruan.

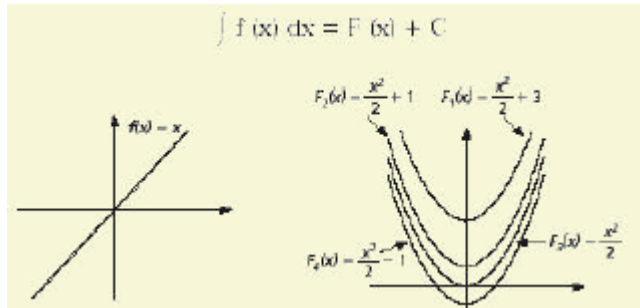
1.1. Jatorrizkoak

$f(x)$ funtzioa egonda, $F(x)$ funtzioa horren **jatorrizkoa** dela esango da, $F'(x) = f(x)$ egiaztatzen bada.

Emandako funtzio baten jatorrizkoa lortzeko egin behar den eragiketari **integrazioa** esaten zaio eta **deribazioaren** alderantzizko eragiketa da.

Definizio horretatik ulertzen da $f(x)$ funtzioak jatorrizko funtzio mugagabeak dituela: $F(x)$ $f(x)$ funtzioaren jatorrizkoa bada, $G(x) = F(x) + C$ (C balio konstantea izanik) bezala zehaztutako beste edozein funtzio mugatu ere horren jatorrizkoa izango da.

Emandako $f(x)$ funtzio baten jatorrizko funtzio guztien multzoari **integral mugagabea** esaten zaio eta orokorrean, honela adierazten da:



Funtzio baten jatorrizkoek euren artean bertikalki bananduta dauden kurben familia osatzen dute. Horrela, $f(x) = x$ funtzioak konstante batean bat ez datozen jatorrizko funtzio mugagabeak ditu, eskuineko irudian agertzen den bezala.

Ikur diferentziala

Hasieran ikusita, badirudi integralen notazioan integrakizuna ixten duen dx ikurra funsgabea dela.

Hala ere, ez da horrela, inolako zalantzarik gabe integratuko den aldagaia nabarmentzeko erabiltzen baita. Horrela, adibidez, bi aldagairen adierazpen honetan:

$$\int (x + t) dt$$

integrazioa t aldagaian egingo da, ez x -an.

1.2. Jatorrizkoen propietateak

Deribazioaren propietateak aplikatuta, integrazioaren propietate komun batzuk zehatz daitezke. Hurrengo **linealtasun propietateek** integral konposatuak errazagoak diren beste integral batzuetan banatzeko balio dute:

- Bi funtzioen batuketaren (edo kenketa) integralak eta funtzio bakoitzaren integralen batuketak (edo kenketa) emaitza bera dute.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

- Konstante bat funtzio batez biderkatetik ondorioztatutako biderkaduraren integrala eta konstantea funtzioaren integralaz biderkatetik ondorioztatutako biderkadura bera dira.

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

1.3. Berehalako integralen taula

Hurrengo taulan zenbait funtzio komunen integrazio arauak laburbilduta daude. Oro har, **berehalako integralak** esaten zaie taula horretatik eta integrazioaren linealtasun propietateetatik zuzenean ondorioztatzen direnei.



$$\int dx = x + k$$

$$\int k dx = kx + k$$

$$\int u^n \cdot u' dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + k$$

$$\int e^u \cdot u' dx = e^u + k$$

$$\int a^u \cdot u' dx = \frac{a^u \ln a}{+k}$$

$$\int \cos u \cdot u' dx = \sin u + k$$

$$\int \sin u \cdot u' dx = -\cos u + k$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' dx = \operatorname{tg} u + k$$

$$\int (1 + \operatorname{tg}^2 u) \cdot u' dx = \operatorname{tg} u + k$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u' dx = \operatorname{cot} g u + k$$

$$\int \frac{1}{1+u^2} \cdot u' dx = \operatorname{arctg} u + k$$

$$\int \frac{-1}{1+u^2} \cdot u' dx = \operatorname{arc} \operatorname{cot} g u + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' dx = \operatorname{arcsin} u + k$$

Berehalako integral bihurtzea

Normalean, badirudi integrazio baten integrakizuna berehalako integralen taulan ez dagoen funtzioa dela.

Hala ere, batzuetan integrakizun horretan eragiketa aritmetiko erraz batzuk baino ez dira egin behar (berreturak kentzea, formula trigonometrikoak aplikatzea, zatikiak arrazionalizatzea eta abar) berehalako integral bat lortzeko.

Logaritmoa bilatzea

Integral bat berehalako integral bihurtzeko trikimailuetako bat «logaritmoa bilatzea da», askotan erabiltzen dena.

Integrakizuna eraldatu ahal bada izendatzailearen deribatua den zenbakitzailea izanda, integrala berehalakoa izango da: bidezko funtzioaren logaritmo nepertarra.

2. Integrazio-metodoak

Funtzioen integrazioa ez da beti erraza. Hori dela eta, zenbait prozedura orokor asmatu dira, eta ondoko biak dira erabilienak: aldagai-aldaketa edo ordezkapen-metodoa, eta zatikako integrazio-metodoa.

2.1. Ordezkapen-metodoa

Integral korapilatsuak kalkulatzeko metodorik hedatuenetakoa **aldagai-aldaketa** edo **ordezkapen-metodoa** da. Teknika honen bidez, t aldagai berria sorrarazten da integrakizunean; horrela lortutako adierazpenaren integrazioa errazagoa izango da. Adibidez, ondoko integral hau:

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx$$

$t = \sin x$ aldaketa aplikatuz gero, integrakizuna nabarmen erraztuko da. Beraz, $dt = \cos x \, dx$ izango da, eta orain integrala ondokoa izango da:

$$\int t^4 \, dt = \frac{t^5}{5} + C$$

Azkenik, aldaketa deseginda, ondokoa izango da integralaren azkeneko emaitza:

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Ordezkapenaren bidezko integrazioaren prozedura

Ordezkapen metodoa (aldagai aldaketa) aplikatzeko ondorengo pausuak bete behar dira:

- x -en adierazpenaren ordezkari integratzeko errazagoa den beste aldagai batez baliatu (t).
- t ezberdindu eta dx adierazi dt -ren menpe.
- x eta dx adierazpenen ordezkari t eta dt erabili integrakizunean.
- Integral berria askatu.
- Aldagai aldaketa desegin.

2.2. Zatikako integrazio-metodoa

Zatikako integrazio-metodoaren bidez funtzioen arteko biderketa baten integrala errazten da; funtzio-biderketa hori $u(x) \times v'(x)$ motakoa da. Hona zatikako integrazioaren formula:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Metodo hau lagungarria da batez ere $v \times du$ integratzea $u \times dv$ integratzea baino errazagoa denean.

Aldagaien aldaketarik ohikoenak

Ez dago erregela finkorik aldagai-aldaketa erabiltzeko; hala ere, metodo egokia da ondorengo kasuetan:

- Aldagaiaren adierazpen baten sinuak eta kosinuak agertzen direnean.
- $e^{u(x)}$ motako faktoredun adierazpenak agertzen direnean.
- Adierazpen arrazional bat $1/(a + bx^2)$ bezala adieraz daitekeenean. Kasu horretan arku tangente bilatuko da.

Bestalde, $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ bezala adieraziz gero, arku sinu edo arku kosinu bilatuko dira.



Zatikako integrazioaren formula hobeto gogoratzeko, baliabide mnemotekniko bat erabili ohi da, formularen elementu bakoitzaren ordeztu hitz bat jarritz, esaldi hau osatu arte: «*Si un día viera un verde soldado vestido de uniforme*».

2.3. Funtzio arrazionalen integrazioa.

Funtzio arrazional asko daude, bi polinomioren zatiketa baldin bada:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Funtzio hauen integrazioak sortzen duen kasuistika zabalean garrantzitsuenak ikusiko ditugu.

Kasu guztietan, **zenbakitzaileak izendatzaileak baino maila txikiagoa duela** onartuko dugu; horrela ez balitz, zatiketa osoa egitean, zenbakitzailea izendatzailea baino maila txikiagoa duen zatikia daukan polinomio baten batuketa izango genuke. Hau da,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = Z(x) + \frac{H(x)}{Q(x)}$$

Kasu desberdin hauek agertuko dira:

2.3.1. Q(x) (izendatzailea) lehen mailakoa da.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + k$$

2.3.1.1. Izendatzailea anizkoitza denean.

$$\int \frac{A}{(x-a)^\alpha} dx = A \cdot \frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + k$$

2.3.1.2. Izendatzailea ezin denean deskonposatu.

$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ non $p^2-4q < 0$ den; orduan $x^2+px+q = (x-\alpha)^2 + \beta^2$ aldaketa egiten da, gero jarraitu bestelako pausoak.

2.3.2. Q(x)-ek (izendatzaileak) erro erreal sinpleak baino ez ditu

Aurreko ereduari erreparatuta, edozein funtzio arrazional mota horretako zatiketan deskonposatzen saiatu behar dugula ikusten dugu. Ikus dezagun nola eta noiz egin daitekeen hori.

$$\int \frac{x-2}{x^2+x} dx$$

Zatiki aljebraikoa bi zatiki bakunen batuketa moduan adierazten saiatuko gara.

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} \rightarrow A = -2, B = 3$$

$$\int \frac{x-2}{x^2+x} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{3}{x+1} \right) dx = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{3}{x+1} dx = -2 \ln|x| + 3 \ln|x+1| + k$$

Hau da, izendatzaileak erre erreal sinpleak bakarrik dituen edozein funtzio arrazional deskonposatu ahal izango dugu.

2.3.3. Q(x)-ek (izendatzaileak) erro erreal anitz dituenen.

Lehenengo, ikus dezagun guztiz kasu sinple bat:

$$\frac{3x^2 - 5x + 1}{x^3} = \frac{3x^2}{x^3} - \frac{5x}{x^3} + \frac{1}{x^3} = \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$



Kasu hau ez da horren sinplea: $\int \frac{3x^2 - 5x + 1}{(x - 2)^3} dx$

Zatiki aljebraikoa honelako batugaietan adieraz dezakegu:

$$\frac{3x^2 - 5x + 1}{(x - 2)^3} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{C}{(x - 2)^3} = \frac{A(x - 2)^2 + B(x - 2) + C}{(x - 2)^3}$$

A=3; B=7 eta C=3

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 5x + 1}{(x - 2)^3} dx &= \int \left(\frac{3}{x - 2} + \frac{7}{(x - 2)^2} + \frac{3}{(x - 2)^3} \right) dx = \int \frac{3}{x - 2} dx + \int \frac{7}{(x - 2)^2} dx + \int \frac{3}{(x - 2)^3} dx \\ &= 3 \ln|x - 2| - \frac{7}{3(x - 2)^3} - \frac{3}{4(x - 2)^4} + k \end{aligned}$$

Orokorrean, zatiki aljebraiko bateko izendatzaileak a erro anitza badu, deskonposatzen dugunean, erroaren anizkoitzasun ordenak adierazten duen adina zatiki lortuko ditugu.

3. Funtzio trigonometrikoen integrazioa.

3.1. $\int R(\sin x, \cos x) dx$, non $R(\sin x, \cos x)$ funtzio arrazionala den. Integral arrazional bihurtzen dira, ondoko aldaketaren bidez:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t; \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dx; \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Adibideak

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \dots = \ln\left(\sin \frac{x}{2}\right) - \ln\left(\cos \frac{x}{2}\right) + k$$

$$\int \frac{1}{\sin x + 2 \cos x} dx =$$

- 3.2. $\int R(\sin x, \cos x) dx$, non $R(\sin x, \cos x)$ funtzio arrazional bikoitia den. Integral arrazional bihurtzen dira, ondoko aldaketaren bidez:

$$\operatorname{tg} x = t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

Adibideak

$$\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \dots \qquad \int \frac{dx}{1 - 2 \sin x \cos x}$$



- 3.3. $\int R(\sin x, \cos x) dx$, non $R(\sin x, \cos x)$ **sin x**-ren funtzio arrazional bakoitia den. Integral arrazional bihurtzen dira, ondoko aldaketaren bidez:

$$\cos x = t$$

Adibidea

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx = \dots$$

- 3.4. $\int R(\sin x, \cos x) dx$, non $R(\sin x, \cos x)$ **cos x**-ren funtzio arrazional bakoitia den. Integral arrazional bihurtzen dira, ondoko aldaketaren bidez:

$$\sin x = t$$

Adibidea

$$\int \cos^3 x dx \qquad \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$$

$$3.5. \int (\cos(ax) \cdot \cos(bx)) dx = \frac{1}{2} \int [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x] dx$$

$$\int (\sin(ax) \cdot \cos(bx)) dx = \frac{1}{2} \int [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x] dx$$

$$\int (\sin(ax) \cdot \sin(bx)) dx = \frac{1}{2} \int [-\cos(a+b)x + \cos(a-b)x] dx$$

Adibidea

$$\int [\sin(5x) \cdot \sin(3x)] dx = \dots$$

4. Funtzio irrazional batzuen integrazioa

4.1. $\int R\left(x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{r}{s}}, \dots, x^{\frac{p}{q}}\right) dx$ **motako integralak**

non $m, r, \dots, p, n, s, \dots, q$ zenbaki osoak diren.

$\mu = \text{MKT}(n, r, \dots, q)$ izanik, ondorengo aldaketaren bidez ebazten da integrala:
 $x = t^\mu$

Adibidea

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} dx \qquad \int \frac{x + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$



4.2. $\int R\left[x, \sqrt{a^2 - x^2}\right] dx$ **motako integralak**

$x = a \sin(t)$ aldaketaren bidez ebazten dira.

Adibidea

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx \qquad \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx$$

4.3. $\int R\left[x, \sqrt{a^2 + x^2}\right] dx$ **motako integralak**

$x = a \operatorname{tg}(t)$ aldaketaren bidez ebazten dira

Adibidea

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx$$

4.4. $\int R\left[x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right] dx$ **motako integralak**

Euler-en ordezkapenak deiturikoak erabiltzen dira:

- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - c)t$, $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$ bada.
- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$, $a > 0$ bada.
- $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$, $c > 0$ bada.

4.5. $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ **motako integral binomikoak.**

Hiru kasutan bakarrik lor dezakegu beraien integrala:

- p osoa denean eta $p > 0$ bada, binomioa garatzen da eta integrala kalkulatu.
 $p < 0$ denean $x = t^k$ aldaketa egiten da, non $k = \text{MKT}(m, n)$ den.
- $\frac{m+1}{n}$ osoa denean. $a + bx^n = t^k$ aldaketa egiten da, non $k = p$ -ren izendatzailea den.

- $\frac{m+1}{n} + p$ osoa denean, $a+bx^n=t^k x^n$ aldaketa egiten da, non k p -ren izendatzailea den.

