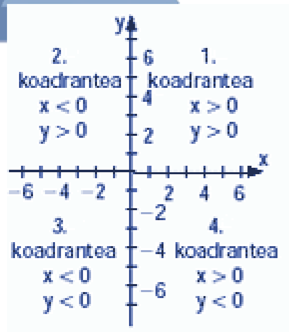
1. Erreferentzi funtzio eta sistemak

Funtzioaren ideia, naturako fenomenoak lege abstraktuen bitartez adierazteko beharrak sortu zuen. Lege abstraktu horiek fenomeno horietan parte hartzen duten magnitudeak erlazionatzen dituzte. Era berean, magnitude horiek eguneroko behaketetatik eskuratutako datuetatik abiatuta egin dira. Kroniken arabera, Gottfried Wilhem Leibniz alemaniarra izan zen "funtzioa" terminoa erabili zuen lehenengoa; matematika-kalkulu modernoa sortu zuenetako bat izan zen.

1.1. Sistema cartesiarrak

Matematikaren inguruko deskribapenetan oso ohikoa da **erreferentzia sistema cartesiar ortogonalak** erabiltzea. Erreferentzia-sistema horiek **abiaburu** deritzon gune komunean elkarri ebakitzen dioten bi (planoan) edo hiru (espazioan) ardatz perpendikularren multzoaren arabera zehazten dira.
Sistema cartesiarretan, planoan, ardatz horizontalean (X batez adierazita) adierazitako baloreak **abzisak** dira, ardatz bertikalean (Y deiturikoa) adierazten diren baloreak, aldiz, **ordenatuak** dira.



1.2. Korrespondentziak, aplikazioak eta funtzioak

Ardatz cartesiar lauen gainean bi zenbaki-multzoren arteko erlazioa adieraz daiteke. Hortaz, erlazioko abiaburu-multzoko elementuak ardatz batean adierazten dira (normalean, horizontalean) eta irudi-multzoak bestean (ardatz bertikalean).
Bi multzoen arteko erlazioak bereziak dira **korrespondentziaz** identifikatzen direnean, hau da, abiaburu-multzoko elementuetatik abiatuta, irudi-multzoko elementu guztiak edo batzuk lortzeko, arauen multzo bat edo elkarketa-legeen multzo bat zehatz badaiteke.

Hasierako multzoko elementu guztiek amaieran irudi bat eta bakarra dutenean, korrespondentzia horri **aplikazio** deritzo.
Aplikazio baten adierazpen grafikoa (ezkerrean) eta aplikazio ez den korrespondentzia bat (eskuinean).
Abiaburu eta irudi multzoetako elementuak zenbakiak baldin badira, aplikazioei **funtzio** deritze. Garrantzia berezia dute **aldagai errealeko funtzio errealek**. Funtzio horiek zenbaki errealak erabiltzen dituzte abiaburu eta irudi multzoetako elementu gisa.

> **Mendekotasun funtzionala**
> Bi balore-multzoren artean mendekotasun funtzionala dagoela esan ohi da elkarketa-arau komun batzuk aplikatuz multzo bateko elementu guztiak beste multzoko elementuetatik abiatuta lor daitezkeenean. Modu horretan, bi multzoen artean ezarritako erlazioa korrespondentzia da

Funtzioa adierazteko f sinboloa erabiltzen da eta abiaburuko multzoa eta irudi-multzoa adierazteko, berriz, R. Hortaz, hau izango da aldagai errealeko funtzio erreal baten adierazpena: $f:R \to R$. Abiaburuko elementu baten adierazpena x baldin bada, y irudi-multzoko elementu batena izango da. Hortaz, $x, y \in R$, honela idatziko dugu $y = f(x)$. x elementua funtzioaren **aldagai askea** da, y, berriz, **mendeko aldagaia**.

LIMITEA

2. Funtzio baten limitea

Limitearen ideia intuitiboa, bizitza arruntean dugunarekin bat dator. Limite baten esanahia helburu batera jotzea da, nahiz eta beti lortzen ez den. Matematiken esparruan ideia hau definizio zehatz batean gauzatu da, non infinituki txikia (infinitesimoak) eta infinituki handiaren (infinitua) kontzeptuak bateratzen dira

2.1. Funtzio baten limite kontzeptua

f(x) funtzioak x = a puntuan **limite** L bat duela esaten da, posible denean f(x) L-ri nahi beste hurbiltzea, x, a-ri mugarik gabe hurbiltzen zaionean, x, a-ren ezberdina izanik. Modu matematikoan horrela izango litzateke:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \textit{oso txikia bada ere}, \exists \delta > 0,$$
$$\textit{beraz } |x - a| < \delta, \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

"a" puntua izanik eta aurreko definizioa kontutan hartuz, bi modu daude "x" "a"-ri hurbiltzeko: x > a baloreetatik (eskumatik) eta x < a (baloreetatik ezkerretik). Hainbat kasutan **eskumako limitea** ($x \to a^+$) eta **ezkerreko limitea** ($x \to a^-$). deitutako balioak lortzen dira batik bat. Definizioz, funtzio baten limitea existitzeko, **alboko bi limiteak** (eskumatik eta ezkerretik) existitu eta berdinak izan behar dute. Hau da:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \exists \lim_{x \to a^+} f(x) \ \textit{eta} \ \lim_{x \to a^-} f(x); \ \ \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L \ \ \textit{delarik}$$

Funtzio baten limitea eta balioa

Funtzio batek puntu batean limite bat izan dezan ez da nahikoa puntu horretan mugatuta egotea. Gainera gerta daiteke, puntua funtzioaren definizio eremuaren parte izatea baina bere balioa limitearekin alderatuz ezberdinak izatea. Hau da, $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

Limitearen bakartasuna

Puntu batean funtzio batek limite bat duenean (hau da, puntuan eskumatik eta ezkerretik limiteak daudenean eta berdinak direnean) limite hau bakarra da.

E zenbakia

E zenbakia, baita ere Euler-en zenbakia deitua, logaritmo naturala edo nepertarraren oinarria dena, ondorengo segida baten limitearekin mugatzen da zorrozki:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3. Limiteen propietateak

a puntuan limite bat duten f(x) eta g(x) funtzioak emanda, ondorengo propietateak betetzen dira:

- Bi funtzioen arteko baturaren limitea, funtzio bakoitzaren limiteen batura da.
- Kenketaren limitea, limiteen arteko kenketa eginez kalkulatzen da.
  $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- Funtzioen arteko biderketaren limitea, funtzio bakoitzaren limiteen biderketa da.
  $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
- Funtzioen arteko zatiketaren limitea, funtzio bakoitzaren limiteen zatiketa da, izendatzailea zero ez bada.
  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$
- Konstante bat eta funtzio baten arteko biderketaren limitea, konstantearen eta funtzioaren limitearen arteko biderketa da.
  $\lim\limits_{x \to a} \left[k \cdot f(x) \right] = k \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

4. Limite infinituak

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ edo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

4.1. *Infinituen konparazioa*

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ eta $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \pm\infty$ badira, f(x), g(x) baino ordena goragoko infinitua dela esango dugu, baldin eta:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ edo beste era batean esanda, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

5. Limiteen kalkulua (x→+∞ doanean)

5.1. *Polinomioen zatiketa*

$f(x) = \dfrac{ax^p + a_1 x^{p-1} + \ldots}{bx^q + b_1 x^{q-1} + \ldots}$ funtzioaren funtzioarekin hiru kasu desberdin ematen dira:

- p>q izatea, orduan $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ (limitearen zeinua a eta b-ren zeinuen araberakoa da)
- p=q izatea, orduan $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{a}{b}$
- p<q izatea, orduan $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

5.2. *Adierazpen infinituen kenketa*

Hiru kasuetariko bat ager daiteke:

- Proposatzen diguten adierazpenen kenketa ordena desberdineko infinituena dela argi eta garbi ikusten dugunean.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x-5)^4}{x^2-1}-1{,}5^x\right)=-\infty$$

- Eragiketa egin daitekeenean

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-5x}{x+3}-2x\right)=\ldots=-11$$

- Erroak daudenean
  Emandako binomioaren konjokatuarekin biderkatu eta zatitu behar da, ondoren eragiketak egin eta azkenik limitea atera

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)=\ldots=-\frac{1}{2}$$

5.3. *e zenbakia*

Gogoratu ondorengoa: $e=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{ax}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{\frac{1}{-x}ax}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{-a}=e^{-a}$$

5.4. $(1)^\infty$ *motako adierazpenak*

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ eta $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ badira, orduan:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

5.5. *Funtzio baten limitea $x\to-\infty$ doanean*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

Ondoren sinplifikatu eta, gero, limitea atera.

6. Asintota bertikalak eta horizontalak

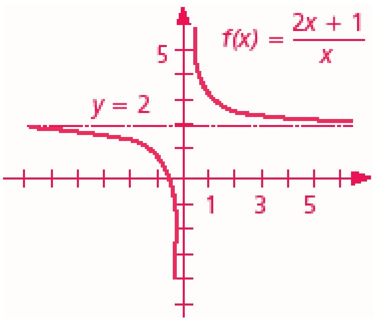
x aldagaia a-rantz doanean f(x) funtzioa modu zehaztu gabean hazten bada, bere limitea **infinitua** dela esango da (+∞, hazkuntza noranzkoa positiboan bada, eta -∞, hazkuntza noranzkoa negatiboan bada). Hala nola, posiblea da ere funtzio baten limiteak zehaztea x-en balioak +∞-rantz edo a -∞-rantz jotzen duenean.

Beraz, a puntuan behintzat funtzioaren alboko limiteetariko bat dagoenean eta limite hau +∞ edo -∞ denean, f(x) funtzioak x = a zuzena **asintota bertikala** duela esan ohi da.

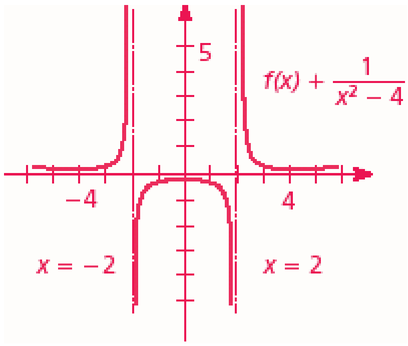
$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad x = a$$ zuzena da asintota bertikala.

Modu berean, x +∞-rantz edo -∞-rantz hurbiltzen bada, eta behintzat funtzio baten limite bat dagoenen eta limite hau b denean, f(x) funtzioak y = b **asintota horizontala** duela esaten da.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \quad \Rightarrow \quad y = b$$ zuzena da asintota horizontala.



Funtzio bateko asintota horizontalak.



Funtzio bateko asintota bertikalak

7. Indeterminazioen ebazpena

Funtzio konplexu baten limitea ebazteko limiteen propietate orokorrak erabiltzen dira. Hala ere, batzuetan ez da nahikoa propietate hauetara jotzea, ebatzi beharreko indeterminazioak agertzen baitira. Funtzioaren limitea funtzioa osatzen duten limiteetatik zuzenki lortzen ez denean, *indeterminazio* bat dagoela esaten da.

Arruntenak hauek dira:

- Batuketa edo kenketa eragiketarekin
  - **Infinitu ken infinitu** (∞ - ∞): funtzioen kenketa bat egiteko, funtzio bat bider bestea egin beharko da zatikizuna lortzeko eta ondorioz, limitea ebatzi. Errotzaileak agertzen badira, errotzaileak duen konjuratuaren espresioarekin biderkatu eta zatituko dira.
- Biderketa eragiketarekin
  - **Zero bider infinitu** (0 · ∞): f(x) → 0 bada eta g(x) → ∞,f(x) · g (x) adierazpena f(x)/(1/g(x))-gatik ordezkatu daiteke, zein 0/0 motakoa delarik.
- Biderketa eragiketarekin
  - **Zero zati zero** (0/0): funtzio polinomio bat bada, zenbakitzailea eta izendatzailea faktorizatuko dira eta lortutako binomio berdinak sinplifikatu egiten dira; errotzaileak dauzkaten funtzioetan, errotzaileak duen konjuratuaren espresioarekin biderkatzen dira zenbakitzailea eta izendatzailea.
  - **Infinitu zati infinitu** (∞/∞): funtzio polinomiko bat bada, zenbakitzailea eta izendatzailea gradurik handieneko terminoagatik zatitzen dira ebazteko; funtzioek errotzaileak dauzkatenean, errotzaileak duen espresioaren konjuratuarekin biderkatzen dira izendatzailea eta zenbakitzailea.

- Berreketa eragiketarekin
  - **Bat infinitugatik berretuta** ($+\infty$); zero zerogatik berretuta eta infinitu zerogatik berretuta (∞^0): e zenbakiagatik ordezkatzen da ondorengo formularen bitartez:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \right]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} g(x)\left[f(x) - 1 \right]}$$

8. Limiteen kalkulua (x→a doanean)

8.1. Berehalako kasuak

Gogoratu: oinarrizko funtzioetan beti egiaztatzen da f(x) definitua badago x=a den puntuan, orduan

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

8.2. (∞ - ∞) motako indeterminazioak

Indeterminazio hauek kentzeko modurik onena eragiketa egitea eta sortzen den adierazpena aztertzea da.

$$\lim_{x \to 3} \left[\frac{x^2 - 6}{x(x-3)} - \frac{1}{x-3} \right] = \ldots$$

8.3. $\left(\frac{0}{0}\right)$ motako indeterminazioak

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$; polinomioen zatiketa

- $Q(a) \neq 0$ bada, orduan $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$ da.
- Q(a)=0 bada, bi kasu ager daitezke:
  - P(a)=0. Kasu horretan, zatikia sinplifikatu egin daiteke, zenbakitzaile eta izendatzaileen faktorizazioa eginez, eta ondoren sinplifikatu eta limitea atera.
  - $P(a) \neq 0$. Kasu horretan, limitea $\pm\infty$ da.

8.4. 1^∞ motako indeterminazioak

5.3. atalean eman dira ebazpenerako pausuak

JARRAITASUNA

9. Funtzioaren jarraitasuna puntu batean

Jarraitasunaren kontzeptua erreza da ulertzea intuitiboki. Modu erraz batean, tarte batean, aldagai errealeko funtzio erreal bat jarraitua dela esan daiteke, tarte horretan paper baten gainean arkatza altxatu gabe irudikatu daitekeenean. Ideia intuitibo hau matematikoki deskribatzeko limitearen kontzeptura jotzen da.

Funtzio baten jarraitasuna

f(x) funtzio bat x=a den **puntu batean jarraitua** da baldin, eta soilik, ondorengo baldintzak betetzen badira:

- Funtzioa a puntuan existitzen da. $\exists\, f(a)$
- x a-rantz doanean f(x)-en **limitea** existitzen da.

  $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$
- Funtzioaren balioa puntuan eta puntu horretako limitea berdinak dira:

  $$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Aurreko baldintzetariko bat betetzen ez denean funtzioa puntuan **ez jarraitua** edo **etena** dela esaten da.

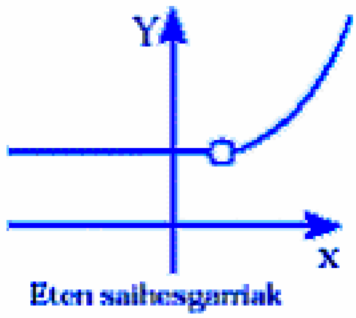
> **Funtzio jarraituak naturan**
>
> Fenomeno natural fisikoen ikerketak erakutsi duenez, fenomeno hauek deskribatzeko erabiltzen diren funtzio matematiko gehienak izaera jarraitua dute. Dinamika eta elektromagnetismo klasikoaren oinarrizko ekuazioek funtzio jarraituen eredua jarraitzen dute; aldiz, mekanika erlatibista eta fisika kuantikoaren teoria garaikideetan, singulartasun kontzeptua agertzen da, etenaren funtsezko elementua dena eredu fisiko eta kosmologikoen jarraitasunean.

Eten motak:

Eten saihesgarria

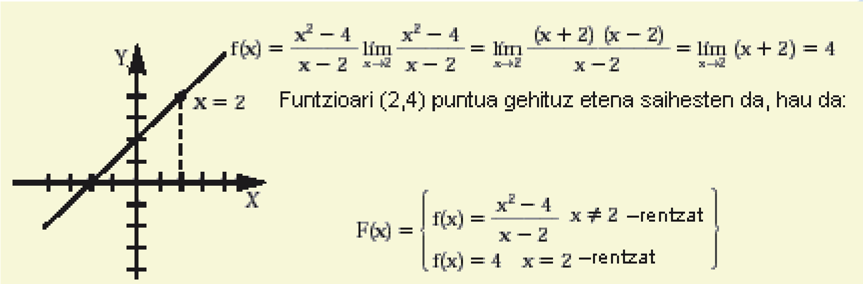
Funtzio bat x=a den puntuan etena denean, baina puntu horretan limitea existitzen denean, etena saihesgarria dela esaten da.

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ baina ez dago f(a) baliorik



Funtzioak puntuan limitea duenean baina funtzioa puntuarentzat mugaturik ez dagoenean, **eten saihesgarria** dela esaten da.
Saihesgarria den eten puntuan ere jarraitua den funtzio berri bat lortzeko ondorengo moduan jokatu behar da:

- a puntuan funtzioaren limitearen balioa kalkulatzen da.
- Funtzioaren definizio-eremuari a puntua gehitzen zaio eta honako balioa ematen zaio. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$



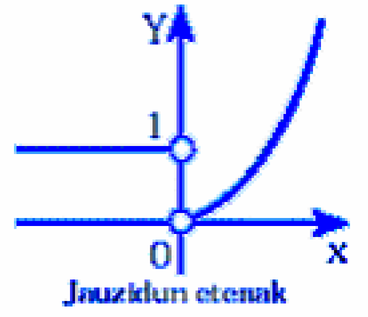
x=2-an eten saihesgarri bat du f(x) funtzioak. F(x) jarraitua izango litzateke R-en.

Eten saihestezinak

Eten saihestezinak deituriko beste eten-mota batzuk daude, ezin ebatz daitezkeenak. Eten hauek honela sailkatzen dira:

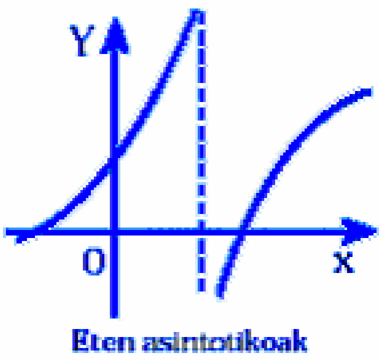
- **Jauzidun etenak**: alboko limite biak existitzen direnean (eskumatik eta ezkerretik), baina haien artean ezberdinak direnean.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

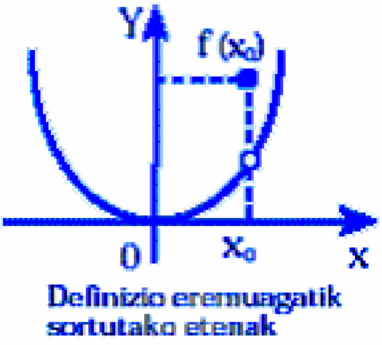


- **Eten asintotikoak:** limitea infinitu denean.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{eta} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$$



- **Definizio eremuagatik sortutako etenak**: limitea existitzen denean eta funtzioa puntuan mugatuta dagoenean, baina balio biak bat ez datozenean.
  $\exists\ f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$



Bigarren motako etena

Modu orokorrean **bigarren motako etena** deitzen zaio alboko limiteetariko bat mugatua denean eta bestea infinitu denean edo existitzen ez denean.

10. Jarraitasuna tarte batean

Funtzio bat tarte batean (finitua edo infinitua) jarraitua dela esaten da tarteko puntu bakoitzean jarraitua bada.
Tarte batean jarraituak diren funtzioei buruzko teorema garrantzitsuak daude. Ikus ditzagun teorema horiek.

10.1. ***Bolzano-ren teorema***

$f(x)$ funtzioa tarte txiki batean jarraitua bada eta tartearen muturretan zeinu desberdinetako balioak hartzen baditu, orduan, ziurra da tarte horretan abzisa ardatza ebakitzen duela. Hau da:
$f(x)$ $[a,b]$ tartean jarraitua bada eta $f(a)$-ren zeinua $\neq f(b)$-ren zeinua, orduan $f(c)=0$ betetzen duen $c\in(a,b)$ existitzen da.

10.2. ***Bolzano-ren teoremaren ondorioak***

<u>Bitarteko balioaren teorema (Darboux)</u>

$f(x)$ jarraitua bada $[a,b]$ tartean, orduan, $f(a)$ eta $f(b)$-ren arteko balio guztiak hartzen ditu. Hau da, $f(a)$ eta $f(b)$-ren artean dagoen k zenbakia edozein dela ere, $f(x)=k$ betetzen duen s, $a<s<b$, zenbaki bat dago.

<u>Beste ondorio bat.</u>

$f(x)$ eta $g(x)$ jarraituak badira $[a,b]$ tartean eta $f(a)<g(a)$ eta $f(b)>g(b)$ badira, orduan, $f(s)=g(s)$ betetzen duen $s\in(a,b)$ zenbaki bat existitzen da.

10.3. ***Weierstrass-en teorema***

$f(x)$ jarraitua bada $[a,b]$ tartean, orduan, tarte horretan maximo eta minimo absolutu bat ditu. Hau da, $[a,b]$ tarteko c eta d zenbaki batzuk daude hau betetzen dutenak:
$x\in[a,b]$ edozein izanda ere, $f(d)\leq f(x)\leq f(c)$