Determinantearen definizioa

A matrize karratu bati **zenbaki** bat erantsi diezaiokegu. Gero ikusiko dugun bezala, zenbaki honek balioko digu:

- Ekuazio sistema bat ikertu eta ebazteko.
- Emandako matrize batek alderantzizkoa duen ikertzeko eta kalkulatzeko.
- ...

Matrize karratu bati erantsitako zenbakiari, matrize horren **determinantea** deitzen zaio eta $\det A = |A|$ eran adierazten da.

Bi ordenako determinanteak

Bi ordenako matrize karratu baten determinantea honako bide honi jarraituz lortzen den zenbakia da:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ bi dimentsiotako matrize karratu batentzat

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$ zenbaki errealari, A-ren determinantea deitzen zaio.

Hiru ordenako determinanteak

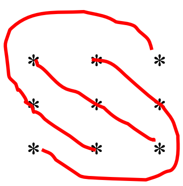
(3 x 3) ordenako matrize baten determinantea honela kalkulatzen da:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ bi dimentsiotako matrize karratu batentzat

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

zenbaki errealari, A-ren determinantea deitzen zaio.

Guzti hau gogoratzeko Sarrusen erregela izeneko erregela mnemotekniko bat erabiliko dugu



+ zeinua duten batugaiak

- zeinua duten batugaiak

Determinanteen propietateak

1. Matrize baten determinantea bere irauliaren determinantearen berdina da

$$|A| = |A^t|$$

2. Matrize karratu baten errenkada bateko (edo zutabe bateko) elementu guztiak zenbaki berdinarekin biderkatzen baditugu, matrizearen determinantea ere bider zenbaki hori egin behar dugu.

3. Matrize karratu batek zeroen errenkada bat (edo zutabe bat) badu, bere determinantea zero izango da.

4. Matrize karratu baten bi errenkada (bi zutabe) paralelo trukatzen baditugu, determinantearen zeinua aldatzen da.

5. Matrize karratu batek errenkada paralelo bi (zutabe paralelo bi) berdinak baditu, bere determinantea zero da.

6. Matrize batek bi errenkada (edo bi zutabe) proportzionalak baditu, bere determinantea zero da.

7. Matrize karratu batean lerro edo zutabe bateko elementu guztiak zenbait batugairen batura badira, bere determinantea beste zenbait determinanteren baturatan deskonposa daiteke, ordezkatuz lerro edo zutabe hura, lehen batugaiaz, bigarren batugaiaz, …

$$\det(F1+G1,F2,F3) = \det(F1,F2,F3) + \det(G1,F2,F3)$$

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & d+e \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & e \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

8. Matrize baten errenkada bati gainerako errenkada paraleloen konbinazio lineal bat gehitzen badiogu, bere determinantea ez da aldatzen.

9. Matrize bateko errenkadetako bat gainerako errenkada paraleloen konbinazio lineala bada, orduan, bere determinantea zero da. Eta alderantziz: determinante bat zero bada, errenkada bat (edo zutabe bat) gainerakoen konbinazio lineala izango da.

10. Bi matrizeen arteko biderketaren determinantea bi matrize horien determinanteen arteko biderketaren berdina da.

$$|A \bullet B| = |A| \bullet |B|$$

Determinante baten garapena

Atal honetan aztertuko dugu edozein ordenako determinantearen balioa lortzeko prozedura. Baina, lehenago kontzeptu batzuk menperatu behar dira.

Minor osagarria

n x n matrize karratu batean a_{ij} elementu bat nagusitzen badugu, bere errenkada eta zutabea ezabatu eta (n-1) x (n-1) azpi-matrizea lortuko dugu. Bere determinantea n-1 ordenako minorra da eta a_{ij} elementuaren **minor osagarri** esango diogu. Adierazpena α_{ij} du.

A matrizean i lerroa eta j zutabea kenduz sortzen den matrizearen determinanteari, A matrizeko a_{ij} elementuaren minor osagarria deitzen zaio.

Adibidea

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ matrizearen monor osagarriak hauek dira:

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \alpha_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \qquad \alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \qquad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Matrize adjunta

α_{ij} elementuaren adjuntua esaten zaio $A_{ij} = (-1)^{i+j} \bullet \alpha_{ij}$ zenbakiari; hau da, i+j baturaren emaitza bakoitia edo bikoitia den arabera, bere zeinua plus edo minus duen minor osagarria.

Matrize karratu baten elementuen adjuntuak dituen matrizeari **matrize adjuntua** deitzen zaio eta Adj(A) bezala adierazten da.

Adibidea

Aurreko adibideko A matrizearen adjuntuak hauek dira:

$$\begin{array}{llll} A_{11} = -3 & & A_{12} = 6 \\ A_{21} = 6 & & A_{22} = -12 \\ A_{31} = -3 & & A_{32} = 6 \end{array}$$

Beraz, A-ren matrize adjuntua ondokoa da:

$$\mathrm{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrize adjuntuaren propietatea

Edozein A matrizearentzat ondoko hau ematen da:

$$A\cdot(Adj(A))^t = (Adj(A))^t \cdot A = |A| \cdot I$$

Determinante baten garapena

n ordenako matrize karratu baten determinantea zera da: edozein errenkada edo zutabeko elementuak bider beraien adjuntuen batura.

Hiru ordenako determinantearen garapeneko batugaiak kontutan izanda, honela ipin dezakegu:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Matrize karratu bateko errenkada edo zutabe bateko elementuak euren adjuntuekin biderkatzen baditugu eta emaitzak batzen baditugu, hasierako matrizearen determinantea lortuko dugu. Kasu horretan, determinantea errenkada horretako elementuen arabera garatuta dagoela esaten da.

Matrize baten alderantzizkoa

Matrize baten alderantzizkoak ondoko baldintza bete behar du:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Matrize adjuntuaren propietatea kontutan izan da,

$A \bullet (Adj(A))^t = |A| \bullet I$ adierazpenean bi atalak $|A|$-rekin zatitzerakoan.

$$\frac{A \bullet (Adj(A))^t}{|A|} = \frac{|A| \bullet I}{|A|} \quad \Rightarrow \quad A \bullet \frac{(Adj(A))^t}{|A|} = I \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{(Adj(A))^t}{|A|}$$

Ondorioa: A matrize batek alderantzizkoa izan dadin, behar beharrezkoa da $|A| \neq 0$ izatea. Kasu honetan matrizeari erregularra deitzen zaio. Bestela singularra.

Matrize baten heina

- Aurreko unitatean ikusi den bezala, matrize baten heina linealki independente dituen errenkaden (edo zutabeen) kopurua da.

  Baina, helburua matrizeen heinak kalkulatzeko determinanteak erabiltzea da. Horretarako, determinanteen propietateak gogoratuko ditugu.

  Matrize karratu baten determinantea zero izateko, beharrezkoa eta nahikoa den baldintza bakarra bere errenkadetako bat (edo zutabeetako bat) beste bat edo batzuen menpekoa izatea da. Hau da:

  $|A| = 0 \Leftrightarrow A$ matrizearen errenkadak linealki menpekoak dira.

  $|A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ matrizearen errenkadak linealki independenteak dira.

- Matrize baten heina "**nulua ez den minorretatik handienak**" adierazten du.

  Adibidea

  Kalkulatu ondorengo matrizearen heina: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \qquad A2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad eta \quad A3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{hein(A)=2}$$