1. Berdintza. Identitatea. Ekuazioa.

Berdintza: Letrazko edo zenbakizko espresioak (=) berdin ikurrarekin lotuta daudenean **berdintza** deitzen zaie. Berdintza egia edo gezurra izan daiteke.

$666 = 6 \cdot 10^2 + 6{\cdot}10+6$ $\qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$2^2 + 3^2 = 5^2$ $\qquad x + y = 12$

Berdintzaren barnean hauek agertzen dira:

Zenbakizko identitatea: Zenbakien arteko egiazko berdintza bat da.

$3^2 + 4^2 = 5^2$ $\qquad 888 = 8{\cdot}10^2 + 8{\cdot}10 + 8$

Identitate algebraikoa: Letrak zenbakiekin ordezkatuz beti betetzen den berdintzari deitzen zaio (*a eta b-ren edozein baliorentzat*).

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ekuazioa: Egia den berdintza bat edo letren balio batzuentzat bakarrik ematen den berdintza ekuazioa deitzen da.
"Ekuazioa berdintza-proposamena da".

$$\frac{6}{15} = \frac{8}{x} \qquad\qquad x + y = 12$$

Agertzen diren letrei ezezaguna edo aldagaia esaten zaie.
Ekuazioa egiaztatzen duten letren zenbakizko balioei soluzioak edo ekuazioaren erroak deitzen zaie.
Ekuazio bat askatzea (ebaztea) bere soluzioak bilatzean datza.

2. Ekuazio linealak. Interpretazio geometrikoa.

Ekuazio bateko ezezagun guztien maila gehienez bat denean (bi ezezagun desberdin ezin dira elkar biderkatu), ekuazio horri lineala deitzen zaio.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ erako espresioei **ekuazio lineala** deitzen zaie, non
$(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ **aldagaiak** diren;
$(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ aldagaien **koefizienteak** diren;
b **gai askea** den.

Aldagaien berretzailea bat denean eta beraien artean biderkatzen ez direnean linealtasuna ematen da.

Adibideak: $\begin{cases} 2x - y = 19 \rightarrow \text{lineala da.} \\ x - 3xy + 2 = 0 \rightarrow \text{ez da lineala.} \\ x + y^2 = 6 \rightarrow \text{ez da lineala.} \end{cases}$

Ekuazio linealetatik sinpleena $ax = b$ dugu.

- Bi ezezagun dituen ekuazio lineala $ax + by = c$ da. Ekuazio honek, planoan, **ZUZEN** bat adierazten du. Zuzeneko puntu guztiak ekuazioaren soluzioak dira.
- Hiru ezezagun dituen ekuazio lineala $ax + by + cz = d$ da. Ekuazio honek, espazioan, **PLANO** bat adierazten du. Planoko puntu guztiak ekuazioaren soluzioak dira.

2.1. Ekuazio lineal baliokideak.

Soluzio bera duten ekuazio linealak baliokideak deitzen dira.

Adibidea: a) $x^2 - x - 12 = 0$ eta $(x - 4)(x + 3) = 0$ baliokideak dira.
b) $x^2 - 1 = 0$ eta $3x - 3 = 0$ ez dira baliokideak.

3. Bi ezezaguneko ekuazio linealen sistemak.

Aldez aurretik aipatu den bezala, horietariko ekuazio lineal bakoitzak, grafikoki, **ZUZEN** bat adierazten du.

Bi ezezagun dituen bi ekuazio linealeko sistema bat ondoko hau dugu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$ non ezezagunen koefizienteak eta gai askeak zenbaki errealak diren.

4. Hiru ezezaguneko ekuazio sistemak.

Aldez aurretik aipatu den bezala, horietariko ekuazio lineal bakoitzak, espazioan, grafikoki ***PLANO*** bat adierazten du.

Hiru ezezagun dituen hiru ekuazio linealetako sistema bat ondoko hau dugu:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_2x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$ non ezezagunen koefizienteak eta gai askeak zenbaki errealak diren.

5. Sistema bat beste sistema mailakatu bat nola bihurtu.

Ikus dezagun adibide baten bitartez, nola bihurtu edozein sistema, sistema mailakatu batean.

$$\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \\ -y + z = 1 \end{cases} \left\langle E2 - 3.E1 \right\rangle \begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ 5y + 4z = -3 \\ -y + z = 1 \end{cases} \left\langle E2 + 5.E3 \right\rangle \begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ 5y + 4z = -3 \\ 9z = 2 \end{cases}$$

6. GAUSSen metodoa

Ekuazio linealen sistema bat sistema mailakatu bihurtzeko prozesuari Gaussen metodoa esaten zaio eta hobetu egin daiteke ezezagunak alde batera utzi eta zenbakiak bakarrik erabiltzen baditugu (koefizienteak eta gai askeak). Ikus dezagun zein izango litzatekeen aurreko ataleko adibidearen ebazpena:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & . & 2 \\ 3 & -1 & 1 & . & 3 \\ 0 & -1 & 1 & . & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & . & 2 \\ 0 & 5 & 4 & . & -3 \\ 0 & -1 & 1 & . & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & . & 2 \\ 0 & 5 & 4 & . & -3 \\ 0 & 0 & 9 & . & 2 \end{pmatrix}$$

zenbakiz osaturiko kaxa horiei matrizeak esaten zaie eta oso sakon landuko ditugu. Matrize horien bitartez, asko erraztuko dugu ondoz ondoko egiten ditugun aldakuntzen prozesua. Azken ebakuntza erraz ebazten den ekuazio sistema mailakatua dela esango dugu.

GAUSSen metodoa ekuazio linealen sistema ekuazio mailakatuen sistema bihurtzea da. Horretarako, “zeroak egingo ditugu” eta ekuazioetan oinarrizko bi aldakuntza egingo ditugu:

- Ekuazio bat zero ez den zenbaki batekin biderkatu.
- Ekuazio bati zenbaki batekin biderkatutako ekuazio bat gehitu.

Prozedura ondokoa izango da:

- Ezezagunak ekuazio guztietan ordena berdinean ipiniko (ezarri) dira.
- "Lehen ekuazioa" finkatuko da eta besteetan eragiketen bidez (propietatea erabiliz) "lehen batugaia" ZERO bihurtuko dugu.
- Lehen eta "bigarren" ekuazioak finko mantenduz, besteetan eta eragiketen bidez "bigarren batugaia" ZERO bihurtuko dugu.
  Honela ekuazio-sistema triangeluarra bihurtzen zaigu.

7. Ekuazio sistemen eztabaida

Gaussen prozesua amaitzean, edo tarteko urratsen batean, honako kasuetako batekin aurkituko gara:

- ***Zeroen errenkada bat***. Garrantzirik gabeko ekuazioa da eta, beraz, kendu egin dezakegu.
- ***Bi errenkada berdin edo proportzional***. Ekuazio baliokideenak dira eta euretariko bat kendu egin dezakegu.
- ***Zeroen errenkada bat, zero ez den azken zenbakia*** -gai askeari dagokiona- ***izan ezik***. Argi dago ezinezkoa dela horrelako ekuazio bat egotea. Kasu horretan, sistema bateraezina dela esango dugu.

Hona hemen ager daitezkeen kasu guztiak:

1. Baliozko ekuazioak ezezagunak beste izango dira.

$$\begin{pmatrix} ZE & E & E & E & . & E \\ 0 & ZE & E & E & . & E \\ 0 & 0 & ZE & E & . & E \\ 0 & 0 & 0 & ZE & . & E \end{pmatrix} \quad \text{ZE= zero ez den zenbaki bat; E = edozein zenbaki.}$$

Adibidea: Eztabaidatu eta ebatzi $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{cases}$ sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 2 \\ 2 & 3 & 5 & . & 11 \\ 1 & -5 & 6 & . & 29 \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} E1 \\ E2-2\cdot E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & -2 \\ 0 & 1 & 3 & . & 7 \\ 0 & -6 & 5 & . & 27 \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3+6\,E2 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & -2 \\ 0 & 1 & 3 & . & 7 \\ 0 & 0 & 23 & . & 69 \end{pmatrix}$$

Sistema bateragarri zehaztua da.
Emaitza y=-2, x=1 z= 3

2. Baliozko ekuazioak ezezagunak baino gutxiago dira.

$$\begin{pmatrix} ZE & E & E & E & . & E \\ 0 & ZE & E & E & . & E \\ 0 & 0 & ZE & E & . & E \end{pmatrix} \quad \text{ZE= zero ez den zenbaki bat; E = edozein zenbaki.}$$

Adibidea: Eztabaidatu eta ebatzi $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=1 \end{cases}$ sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & . & 1 \\ 3 & 2 & 1 & . & 1 \\ 5 & 3 & 3 & . & 1 \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} E1 \\ E2-3\,E1 \\ E3-5\,E1 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & . & 1 \\ 0 & -1 & 4 & . & -2 \\ 0 & -2 & 8 & . & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3-2\,E2 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & . & 1 \\ 0 & -1 & 4 & . & -2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & . & 1 \\ 0 & -1 & 4 & . & -2 \end{pmatrix}$$

Sistema bateragarri zehaztugabea da.
Soluzioa: x= -1-3z; y= 2+4z; z=z $\forall z \in R$

3. Ekuazio batean elementu guztiak zero gai askea izan ezik

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & . & \neq 0 \end{pmatrix}$$

Adibidea: Eztabaidatu eta ebatzi $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases}$ sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & . & 1 \\ 3 & 2 & 1 & . & 1 \\ 2 & 1 & 2 & . & 1 \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} E1 \\ E2-3E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & . & 1 \\ 0 & -1 & 4 & . & -2 \\ 0 & -1 & 4 & . & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3-E2 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & . & 1 \\ 0 & -1 & 4 & . & -2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema bateraezina; ez du emaitzarik.

8. Ekuazio sistemen eztabaida (parametroekin)

$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \end{cases}$ Honako hau, ekuazio sistema bat baino gehiago, sistema multzo bat da.

m parametroaren balio bakoitzerako ekuazio sistema desberdin bat dago. Infinitu sistema horietatik, batzuk bateragarriak izango dira eta beste batzuk, bateraezinak.

Parametroaren menpeko sistema eztabaidatzea, sistema era batekoa edo bestekoa izateko **m** parametroak zein balio hartu behar dituen jakitea da.

Horretarako Gaussen metodoa erabiliko dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & . & 3 \\ 2 & 1 & -1 & . & 1 \\ 5 & -5 & 2 & . & m \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} E1 \\ E2-2E1 \\ E3-5E1 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & . & 3 \\ 0 & 5 & -3 & . & -5 \\ 0 & 5 & -3 & . & m-15 \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3-E2 \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & . & 3 \\ 0 & 5 & -3 & . & -5 \\ 0 & 0 & 0 & . & m-10 \end{pmatrix}$$

- $m=10$ bada, sistema bateragarri zehaztugabea; bere soluzioa $(x, -4+3x, -5+5x)$ $\forall x \in R$.
- $m \neq 10$ bada, sistema bateraezina, ez du soluziorik.