

## ARIKETAK

1. Askatu ondoko sistema:  $2X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$   $X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

*Sol:*  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$   $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

2.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  eta  $C = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  matrizeak emanik, ondoko berdintzetatik zeintzuk dira egiazkoak?

$A \cdot B = B \cdot A$ ;  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ;  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

*Sol:* Ez; Bai; Bai

3. Askatu ondoko sistema:  $4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$   $2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

*Sol:*  $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$   $Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

4.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  eta  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  matrizeak emanik, kalkulatu  $A^2 - B^2$

*Sol:*  $\begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & -16 & -28 \\ -8 & -24 & -52 \end{pmatrix}$

5.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  matrizea emanik, kalkulatu  $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$

*Sol:*  $\begin{pmatrix} n & 0 \\ \frac{n^2 + n}{2} & n \end{pmatrix}$

6.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  matrizea emanik, kalkulatu  $B = I + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{99}$

*Sol:*  $\begin{pmatrix} 150 & -50 \\ 150 & -50 \end{pmatrix}$

7.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  matrizea emanik kalkulatu  $(I + A)^{12}$

*Sol:*  $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 66 & 220 \\ 0 & 1 & 12 & 66 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



8.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  dela jakinik, egiazta ezazu  $A^2 = A + 2I$  dela.

9. Askatu ondoko sistema:  $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$  eta  $X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Sol:  $X = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$   $Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

10.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  dela jakinik, kalkulatu  $A^t$  eta  $A^{-1}$

Sol:  $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$   $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

11. Askatu ondoko sistema:  $2X - 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$   $X + 5Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Sol:  $X = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 12 & 38 \end{pmatrix}$   $Y = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

12. Bila ezazu  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$  baldintza betetzen duen X matrizea.

Sol:  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & a - 2b \end{pmatrix}$

13. Bila ezazu  $3X + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  baldintza betetzen duen X

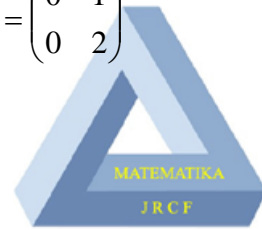
matrizea.

Sol:  $X = \frac{3}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & -8 \\ -9 & -7 \end{pmatrix}$

14.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  matrizea emanik,

- Kalkulatu  $A^2$
- Kalkulatu  $A^2 + \alpha \cdot A + \beta \cdot I = 0$  betetzen duten  $\alpha$  eta  $\beta$ -ren balioak.

Sol:  $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ;  $\alpha = -4$  eta  $\beta = 3$



15.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  matrizea emanik,

- Egiaztatu  $A$  matrizea alderanzgarria dela
- Kalkulatu  $A^{-1}$
- Egiaztatu  $(A-I)^2=0$  dela

Sol:  $|A|=1 \rightarrow \text{Bai}$ ;  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

16.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrizea emanik,

- Bilatu  $A^2, A^3, \dots, A^n$
- Egiaztatu  $(A-I)^2=0$  dela

Sol:  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

17.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrizea emanik,

- Bilatu  $A^2, A^3, \dots, A^n$
- Egiaztatu  $A^3 - 3A^2 + 3A = I$  dela

Sol:  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{1}{2}n(n+1) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18. Baldin  $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot B$  bada,  $A=B$  al da?

19. Bila ezazu  $A^{37}$  jakin da  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  dela.

Sol:  $A^{37} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

20. Kalkulatu  $A^n$  jakin da  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  dela.

Sol:  $A^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

21.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  matrizea emanik, kalkulatu  $A^2, A^3, \dots, A^n$



$$\text{Sol: } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 16 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 63 & 64 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4^n - 1 & 4^n \end{pmatrix}$$

22. Kalkulatu  $X^2 + Y^2$  jakin da  $4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$  eta  $2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{Sol: } X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 47 & 6 \\ 29 & 8 \end{pmatrix}$$

23. Askatu  $A \cdot X \cdot B = C$  ekuazioa, non  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  diren.

$$\text{Sol: } X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

24. Askatu ondoko sistema:  $2A + B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$  eta  $3A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

$$\text{Sol: } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

25. Askatu ondoko sistema:  $2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$  eta  $3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$

$$\text{Sol: } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 14 \\ -12 & -6 & -21 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -21 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix}$$

26.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  matrizea emanik, kalkulatu, arrazoituz,  $A^n$

$$\text{Sol: } A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

27.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrizea emanik, bilatu  $A \cdot B = B \cdot A$  betetzen duten B matritze guztiak.

$$\text{Sol: } B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

28. Askatu ondoko sistema:  $A + B + C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $A - B + C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  eta

$$A + B - C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sol: } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

29.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  eta  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  matrizeak emanik, kalkulatu  $A \cdot X = B$  betetzen duen X matrizea.

$$\text{Sol: } X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

30.  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  eta  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  matrizeak emanik, existitzen al da

$A \cdot B = B \cdot A$  betetzen duen  $a$ -ren balio errealik?

Sol: Ez du soluziorik

31. Askatu  $X$  matrizea hurrengo ekuazioan eta aurkitu bere balioa  $2A - A \cdot X = B \cdot X$  kontuan hartuta  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  eta  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  direla.



Sol:  $X = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

32.  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrizea edukita, kalkulatu  $A^{12} + A^{-1}$

Sol:  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

33.  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$  matrizea edukita, zehaztu zein diren  $m$ -ren balioen

baterako  $A \cdot X = m \cdot X$  berdintza betetzen duten eta nuluak ez diren  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

matrize guztiak.

Sol:  $m=2$  denean  $(x, y, x+2y)$

34.  $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  bada, aurkitu  $A \cdot B + B \cdot A = \mathbf{0}$  betetzen duen  $B \neq \mathbf{0}$  matrizea.

Sol:  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b - 3a & -a \end{pmatrix}$

35.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  eta  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrizeak emanik, kalkulatu  $A \cdot X \cdot B = C$ , arrazoituz.

Sol:  $X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

36. Izan bitez A eta B ondoko matrizeak  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Aurkitu  $A-B$  matrizearen alderantzizkoa eta  $X$  matrizea non  $X(A-B) = A+B$  den.

Sol:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$



37. Kalkula ezazu  $X^0 \cdot Y^2$ , jakinik  $X$  eta  $Y$  ondoko sistema betetzen duten matrizeak direla:

$$4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol:  $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

38. Kalkulatu  $X$  matrizea  $3X + AB = 2C$  betetzeko, honako hau jakinda:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol:  $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

39.  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  eta  $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  matrizeak ditugu. Aurkitu  $A$  matrize bat  $B$ -rekin biderkatu eta biderkadura horri  $C$  batuz gero, emaitzatzat  $2A$  edukiko duena.

Sol:  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

40. Matrize hau emanda:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  lortu  $A$ -rekin truka daitezkeen  $B$  matrize guztiak; hau da,  $A \cdot B = B \cdot A$  beteko dutenak.

Sol:  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

41. Izan bitez  $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$  eta  $A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ . Kalkulatu, posible baldin bada:

a)  $A^2 - B^2$

b)  $(A + B)^{-1}$  eta  $(A - B)^{-1}$ .

Sol:  $\begin{pmatrix} -8 & -10 \\ -23 & -43 \end{pmatrix}; \text{EZ}; \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

42. Izan bitez  $2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$  eta  $3A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Kalkula itzazu, posible baldin bada,  $A \cdot B$  eta  $A \cdot B^t$

Sol:  $\text{EZ}; \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

43.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrizea emanik,

a) Kalkula itzazu  $A^2$ ,  $A^3$  eta  $A$ -ren alderantzizkoa.

b) Aurki ezazu  $B$  matrizea,  $AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  izan dadin. Ba al dago  $C$  matrizerik,

$CA = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  izan dadin?

Sol:  $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ; EZ



44. Izan bitez ondoko hiru matrize hauek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Aurki ezazu halako matrizea,  $X$ , non  $A X + B = C$  baita.

b) Aurki al daiteke  $Y$  matrizerik, non  $Y A + B = C$ ? Arrazona ezazu emandako erantzuna.

Sol:  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; EZ