

Matrize baten definizioa

Zenbaki ordenatuz osaturiko taula da matrizea. n zutabez eta m errenkadaz eratutako zenbaki errealeen multzoari $m \times n$ dimentsioko matrizea deitzen zaio.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



A matrizea honela adieraz daiteke $A = (a_{ij})$, $\begin{cases} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$ non a_{ij} A matrizeko i errenkadako eta j zutabeko elementua den.

$m \times n$ dimentsioa duten matrizeak $M_{m \times n}$ adierazten dira.

Eta, $n \times n$ dimentsioa duten matrizeen multzoa M_n bezala adierazten da. Multzo honetako matrizeak matrize karratuak deitzen dira eta bi elementu hauek dituzte:

- Diagonal nagusia a_{ii} elementuekin osatuta.
- Bigarren diagonalak a_{ij} elementuekin osatuta eta $i+j=n+1$ izanik

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Diagonal nagusia

Bigarren diagonalak

Matrize motak

- Errenkada kopurua eta zutabe kopurua desberdinak dituen matrizea **matrize errektangeluarra** deitzen da ($m \neq n$ edo $m \times n$).

Adibidea

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Errenkada bakarreko matrize errektangeluarrari **errenkada matrizea** deitzen zaio ($1 \times n$).

Adibidea

$$(-1 \ 3 \ 5)$$

- Zutabe bakarreko matrize errektangeluarrari **zutabe matrizea** deitzen zaio ($m \times 1$).

Adibidea

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Bere elementu guztiak ZEROak dituen matrizeari, **matrize nulua** deitzen zaio.

Adibidea

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matrize karratu bateko diagonal nagusitik gorako edo beherako elementu guztiak ZEROak badira, **matrizea trianguluarra** deitzen da.

Adibidea

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$



- Matrize karratu batean bere diagonal nagusiko elementuak ezik beste guztiak nuluak badira, **matrize diagonal** deitzen zaio.

Adibidea

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Matrize diagonal bateko elementu guztiak berdinak direnean, **matrize eskalarra** deituko diogu.

Adibidea

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Matrize eskalar bateko elementu guztiak 1 direnean, **unitate matrizea (I)** deitzen zaio.

Adibidea

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ordena bat jarraituz, lerroak eta zutabeak trukatu ondoren lortzen den matrizeari **matrize iraulia (A^t)** deitzen zaio. Hau da, errenkadak zutabe eta zutabeak errenkada bihurtuz sortzen den matrizea iraulia deitzen da. Kontutan izan A matrizearen dimentsioa (p x m) baldin bada, A^t matrizearen dimentsioa (m x p) izango dela.

Adibidea

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrize irauliaren propietateak:

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(k B)^t = k B^t$
- $(A B)^t = B^t A^t$

- Matrize karratu bat eta bere iraulia berdinak direnean, **matrize simetrikoa** deitzen zaio. Hau da, $A = A^t$

Adibidea

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

- Matrize karratu bat eta bere irauliaren aurkakoa berdinak direnean, **matrize antisimetrikoa** deitzen zaio. Hau da, $A = -A^t$

Adibidea

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$



Eragiketak matrizeekin

Matrizeen batuketa

$m \times n$ dimentsioa duten $A = (a_{ij})$ eta $B = (b_{ij})$ matrizeen batuketa $m \times n$ dimentsioa duen beste matrize bat da, eta honela egiten da batuketa

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Adibidea

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

Zenbaki baten eta matrize baten arteko biderketa

k zenbaki erreal bat eta $A = (a_{ij})$ $m \times n$ dimentsioko matrize batentzat, zenbaki erreal bat eta matrize baten arteko biderketa $m \times n$ dimentsioko eta ondoko eran emandako matrize bat da

$$k \cdot A = k \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$$

Hau da, matrizeko elementu bakoitza zenbaki errealarekin biderkatuz lortzen den matrizea.

Adibidea

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} \end{pmatrix}$$

Matrizeen biderketa

$m \times n$ dimentsioko $A = (a_{ij})$ matrizea eta $n \times p$ dimentsioko $B = (b_{ij})$ matrizeen arteko biderketa $A \cdot B = (c_{ij})$ erako matrizea da non $c_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$

Bi matrize biderkatu ahal izateko, lehenengoaren zutabe kopuruak eta bigarrenaren errenkada kopuruak berdinak izan behar dute.

Adibidea

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot (-1) & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

Matrizeen biderketaren ondorioak

- Ohar zaitetz matrizeen biderketa ez dela trukakorra; hau da, $A \cdot B \neq B \cdot A$ Ikertu ondoko adibideak:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

- Nuluak ez diren bi matrizeen arteko biderkadura, matrize nulua izan daiteke.

$$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ edo } B = 0$$

Hau da, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$

Alderantzizko matrizea

n ordenako A matrize baten alderantzizkoa n ordenako A^{-1} matrizea dela esaten da, ondoko hau betetzen duelarik:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

non I n ordenako unitate matrizea den.

Alderantzizkoa duen matrizeari, **matrize erregularra** deitzen zaio, bere alderantzizkoari A^{-1} -ten bidez adieraziz. Matrize batek alderantzizkoa ez badu, **matrize singularra** deitzen zaio.

Propietateak

- A^{-1} existitzen bada, bakarra da.
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Alderantzizko matrizearen kalkulua

une honetan, alderantzizko matrizea kalkulatzeko bi prozedura ditugu:

▪ Definizioa erabilita

Adibidea

Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa

Suposatuko dugu $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrizea dela

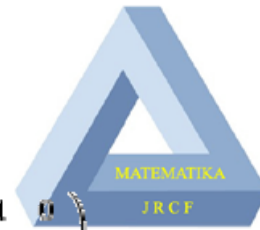
Baina,

$$I = A \cdot A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eragiketak eginez

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+7c & 3b+7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2c = 1 \\ 3a+7c = 0 \\ b+2d = 0 \\ 3b+7d = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -2 \\ c = -3 \\ d = 1 \end{cases}$$



▪ Gauss-en metodoa

A matrizearen alderantzizkoa $(A|I)$ matrizea eragiketa arrunten bidez $(I|A^{-1})$ matrizean transformatzean datza.

Matrize batean lerroen artean egin daitezkeen eragiketa elementalak hauek dira:

1. Bi errenkada elkar trukatu.
2. Zero ez den zenbaki batez biderkatu errenkada bat eta ordezkatu emaitzarekin.
3. Batu bi errenkada (i eta j) zenbakiekin biderkatuz eta emaitza i errenkadan edo j errenkadan jarri.

Adibidea

Kalkulatu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ matrizearen alderantzizkoa

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrize baten heina

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrize bateko errenkadak eta zutabeak bektore bezala kontsidera ditzakegu.

Matrize horretako linealki independenteak diren errenkada edo zutabe kopuruari matrizearen **heina** deitzen zaio. Beraz, matrize baten heina bati da errenkada kopurua edo txikiagoa eta, baita, zutabe kopurua edo txikiagoa. Bere heina o duten matrize bakarrak matrize nuluak dira.



Heina kalkulatzeko Gauss-en metodoa erabiliko da.