

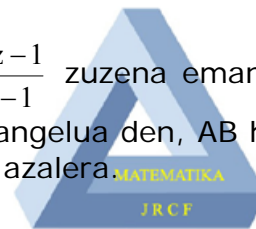
1. Izan bitez  $\pi: 2x-y+3z-2=0$  planoak eta  $r: \begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+2y=-12 \end{cases}$  zuzena.

- a) Zein da planoak eta zuzenaren posizio erlatiboa?  
b) Bilatu planotik zuzenerainoko distantzia.

Sol:  $r \perp \pi$ -ri paraleloa;  $\sqrt{14}u$

2.  $A(2,-1,1)$  eta  $B(3,0,-2)$  puntuak eta  $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$  zuzena emanik, bilatu  $r$  zuzeneko  $P$  puntuak non  $ABP$  triangelua errektangelua den,  $AB$  hipotenusa izanik. Kasu horietarako kalkulatu triangeluaren azalera.

Sol:  $P_1(1,0,0)$  eta  $P_2(3,-2,-1)$ ;  $A_1 = \sqrt{6}$  eta  $A_2 = \frac{\sqrt{30}}{2}$



3. Izan bedi  $A(2,0,-1)$  eta  $B(2,2,-1)$  puntuak osatutako  $r$  zuzena eta modu parametrikotan emandako  $s: \begin{cases} x=a \\ y=1-a \\ z=-1+a \end{cases}$  zuzena

- a) Kalkulatu bi zuzenen arteko distantzia.  
b) Bilatu  $P \in r$  eta  $Q \in s$  puntuak jakinda  $d(P,Q)=d$

Sol:  $\sqrt{2}$ ;  $P(2,0,-1)$  eta  $Q(1,0,0)$

4. Izan bedi jatorritik eta  $P=(a,1,1)$  puntutik igarotzen den  $r$  zuzena eta ekuazio parametrikotik dituen  $s: \begin{cases} ay-z+1=0 \\ x-y+a=0 \end{cases}$  zuzena.

- a) Kalkulatu,  $a$ -ren funtzioan,  $r$  zuzenetik  $s$  zuzena eta  $y=0$  planoaren ebakipuntura dagoen distantzia.  
b)  $r$  eta  $s$  paraleloak izan daitezela, zein da  $a$ -ren balioa?

Sol:  $\frac{\sqrt{1+5a^2}}{\sqrt{2+a^2}}u$ ;  $a=1$

5. Izan bitez  $r: \begin{cases} x=1 \\ y=1+a \\ z=3+2a \end{cases}$  zuzena eta  $A=(2,1,1)$  eta  $B=(2,-1,1)$  puntuak.

- a)  $A$  eta  $B$  puntuetatik igarotzen den zuzena eta  $r$  zuzenaren arteko posizio erlatiboa ikertu ezazu.  
b) Kalkulatu  $P \in r$  puntua/k non  $APB$  triangelua zuzena izan dadin, hipotenusa  $AB$  delarik.

Sol: Gurutzatu;  $P=(1,0,1)$

6.  $A(-1,1,5)$  puntutik igarotzen den,  $x-y+z=1$  planoari paraleloa den eta  $OX$  ardatza ebakitzen duen zuzenaren ekuazio jarraitua bila ezazu. Bilatu zuzen horretatik jatorrira dagoen distantzia.

Sol:  $\frac{x-3}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{5}$ ;  $\sqrt{\frac{39}{7}}u$

7.  $r: \begin{cases} 3x-2y-z+3=0 \\ 2x+y-3z-5=0 \end{cases}$  zuzena,  $A=(1,2,3)$  puntu finkoa eta  $B=(3,1,a)$  puntu aldakorra emanik,  $AB$  segmentuaren proiektzioa  $r$  zuzenean  $\sqrt{3}$  unitate luze izan ditzan bilatu  $a$ -ren balioa(k).

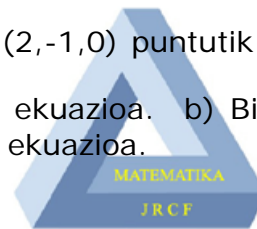
Sol:  $a=-1$  edo  $a=5$

8. Izan bedi  $a$  luzerako aldea duen kubo bat. Bila ezazu diagonal nagusitik (erpin bat eta aurreko aldean beste muturreko erpina lotzen dituen) eta oinarririko diagonalera dagoen distantzia.

$$\text{Sol: } \frac{a}{\sqrt{6}} u$$

9. Izan bedi  $r: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$  zuzena. a) Bila ezazu  $P=(2,-1,0)$  puntutik igarotzen den eta  $r$ -ri perpendikularra den  $s$  zuzenaren ekuazioa. b) Bilatu  $r$ -rekin gurutzatuz  $s$  zuzenari paraleloa den zuzenaren ekuazioa.

$$\text{Sol: } \{x=-2t, y=0, z=-t\}$$



10. Bilatu  $r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$  eta  $s: \begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 4x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$  zuzenek osatzen duten angeluaren

kosinua.

$$\text{Sol: } \frac{3}{\sqrt{84}}$$

11. a) Bila ezazu  $\pi: 2x+y-z-1=0$  planoari perpendikularra den eta  $P=(1,1,1)$  puntutik igarotzen den zuzenaren ekuazioa. b) Kalkulatu  $P$ -tik  $\pi$ -rainoko distantzia.

$$\text{Sol: } \{x=1+2t, y=1+t, z=1-t\}; \frac{1}{\sqrt{6}}$$

12. Izan bitez  $P=(1,-3,-4)$  puntua,  $\pi: x+2y-z=0$  plano eta  $(0,0,0)$ ,  $(0,1,2)$  eta  $(1,0,7)$  puntuak barne dituen  $\pi_1$  plano. a) Bila ezazu  $P$  puntutik igarotzen den eta  $\pi$  eta  $\pi_1$  planoari perpendikularra den plano. b) Kalkulatu  $P$  puntutik  $\pi$  planorainoko distantzia.

$$\text{Sol: } y+2z+11=0; \frac{1}{\sqrt{6}}$$

13.  $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$  zuzeneko puntu bat  $3x-4y+12z-5=0$  planotik 2 unitatera dago, Zein da puntua? Zenbat soluzio daude?

$$\text{Sol: } (13, -24, -13); (-39, 80, 39)$$

14. Bilatu  $A=(0,1,4)$  puntutik igarotzen diren,  $z=0$  plano  $30^\circ$ -ko angeluarekin ebakitzen duten eta  $y=0$  planoari paraleloak diren zuzenen ekuazioak.

$$\text{Sol: } \{x = -4\sqrt{3}t, y = 1, z = 4 + 4t\}; \{x = 4\sqrt{3}t, y = 1, z = 4 + 4t\}$$

15. Bilatu  $P=(1,2,-4)$  puntutik  $r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z = 4 \end{cases}$  zuzenerainoko distantzia.

$$\text{Sol: } \sqrt{3} u$$

16. Izan bitez  $\pi: x+2=0$  plano eta  $r: \begin{cases} 2x-2z-6=0 \\ x+y-z=3 \end{cases}$  zuzena. a) Bilatu  $\pi$  planoak eta  $r$  zuzenak osatzen duten angelua. b) Bila ezazu jatorriaren simetrikoa  $\pi$  planoarekiko.

$$\text{Sol: } \pi/4; P=(-4,0,0)$$

17. Bilatu  $A=(4,3,7)$  puntutik igaro eta  $\pi: x+y+z=0$  planoari paraleloa den  $\pi_1$  planoaren ekuazioa. Kalkulatu  $\pi$  eta  $\pi_1$  planoen arteko distantzia.

$$\text{Sol: } x+y+z-14=0; \frac{14}{\sqrt{3}}$$

18.  $(1,1,0)$ ,  $(1,0,0)$  eta  $(0,1,1)$  puntuak osatzen duten planoak eta  $x+y=0$  planoak eratzen duten angelua bila ezazu.

Sol:  $\pi/3$

19. Izan bitez  $a=(3,0,0)$ ,  $b=(0,0,0)$ ,  $C=(0,2,0)$  eta  $D=(1,1,2)$  puntuak. kalkula ezazu A, B eta C puntuak osatzen duten planoak eta C eta D osatzen duten zuzenak eratzen duten angelua.

Sol:  $54,73^\circ$

20. a) Egiazta ezazu  $P=(1,1,-1)$  puntua  $r: \begin{cases} 2x+y=3 \\ z=-1 \end{cases}$  zuzenean dagoela eta ez dagoela  $\pi: x-2y+3z=1$  planoan. b)  $\pi$  planotik eta P puntutik distantziakidea den r zuzeneko puntu bat bila ezazu.

Sol:  $M=(3,-3,-1)$



21. a) Egiazta ezazu  $A=(1,-1,2)$ ,  $B=(2,2,-3)$  eta  $C=(1,1,0)$  puntuak ez daudela lerrokatuta. b) Kalkulatu jatorritik A, B eta C puntuak osatzen duten planorainoko distantzia.

Sol: Bai;  $\frac{\sqrt{6}}{2}$

22. a) Kalkula ezazu k-ren balioa  $A=(1,-5,k)$ ,  $B=(3,k,-1)$  eta  $C=(k,-5-k,2)$  erpintzat dituen triangelua A erpinean zuzena izan dadin. b) Kalkulatu azalera.

Sol:  $k=-1$ ;  $\sqrt{70} u^2$

23. Izan bitez  $P=(1,1,0)$  eta  $Q=(0,2,1)$  laukizuzen baten elkarren ondoko bi puntu. Hirugarren erpina  $r: \begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases}$  zuzenean dago. Bilatu aurreko baldintzak

betetzen dituzten laukizuzenaren erpinak.

Sol:  $P, Q, A=(1,0,1)$  eta  $B=(0,1,2)$

24.  $(x,y,z)=(2,1,1)+t(-1,0,2)$  zuzena  $2x+y-z=0$  planoan proiektatzen da. Zein da proiektzioaren ekuazioa?

Sol:  $\frac{x-1/2}{1/2} = y = \frac{z-1}{2}$

25. Bilatu  $3x+4y=1$  eta  $4x-3z=1$  planoetatik distantzia berdinerara dauden  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$  zuzeneko puntuak.

Sol:  $A=(19/8, 17/16, -5/8)$ ;  $B=(3/10, -41/20, -27/10)$

26. Izan bitez  $r: \begin{cases} x+y+z+3=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$  eta  $\frac{x+1}{2} = y+1 = \frac{z+d}{-2}$  zuzenak. a) Kalkulatu d-ren balioa bi zuzenak elkar ebaki daitezten. b) Bilatutako d-ren balioarentzat, kalkula bi zuzenek osatzen duten angelua.

Sol:  $d=1$ ;  $45^\circ$

27. a) Bila ezazu jatorritik eta  $(1,2,0)$  eta  $(-1,1,3)$  puntuetatik igarotzen den planoaren ekuazioa. b) Bilatu  $(1,1,1)$  puntutik igarotzen den eta aurreko planoari paraleloa den planoaren ekuazioa. c) Zein da bi planoen arteko distantzia?

Sol:  $2x-y+z=0$ ;  $2x-y+z-2=0$ ;  $\frac{2}{\sqrt{6}}$

28. Kalkulatu  $(1, -2, 3)$  puntutik igarotzen den eta  $x-2y=1$  eta  $x+2z=2$  planoetarako paraleloa den zuzenaren ekuazioa.

Sol:  $\{x=1-4t, y=-2-2t, z=3+2t\}$

29. Bila ezazu  $A=(3,4,5)$  puntutik  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$  zuzenerainoko distantzia.

Sol:  $\sqrt{\frac{24}{29}}$

30. Bila itzazu  $\pi: 2x+y-2z=0$  eta  $\pi_1: x-2y+2z-1=0$  planoetatik distantziakideak diren  $r: \begin{cases} x-z=1 \\ x+y=2 \end{cases}$  zuzeneko puntuak.

Sol:  $A=(11/6, 1/6, 6/6); b=(3/4, 5/4, -1/4)$



31. Izan bitez  $r: \begin{cases} x-1=0 \\ 2y+z-1=0 \end{cases}$  eta  $s: \begin{cases} x-z-2=0 \\ y-z-2=0 \end{cases}$  zuzenak eta  $A=(1,0,2)$ ,

$B=(2,1,2)$  eta  $C=(1,0,1)$  puntuak barne dituen  $\pi$  planoak. a) Bila ezazu  $\pi$  planoaren ekuazioa. b) Zuzenatariko batek  $\pi$  planoak ebakitzen du; bilatu puntuak. c) Egiaztatu beste zuzena  $\pi$ -ri paraleloa dela eta kalkulatu  $\pi$ -ri paraleloa den eta barne duen planoaren ekuazio orokorra.

Sol:  $x-y-1=0; P=(1,0,1); x-y=0$

32. Izan bitez  $P=(1,1,0)$  eta  $Q=(0,2,1)$  laukizuzen baten elkarren ondoko bi puntu. Hirugarren erpinak  $r: \begin{cases} y=0 \\ z=1 \end{cases}$  zuzenean dago. a) Bilatu aurreko baldintzak betetzen dituzten laukizuzenaren erpinak. b) Aztertu PQ segmentuak osatzen duen zuzena eta  $r$  zuzenaren posizio erlatiboa, soluzioa bakarra baldin bada.

Sol:  $P, Q, A=(1,0,1)$  eta  $B=(0,1,2)$  edo  $A=(-2,0,1)$  eta  $B=(-1,-1,0); Paraleloak$

33. Karratu baten elkarren ondoko bi puntu  $P=(1,-1,1)$  eta  $Q=(3,-3,3)$  dira. Karratua  $x+y=0$  planoari perpendikularra den plano baten barnean dago. a) Bilatu beste erpinak. b) Aurreko atalean lortutako erpinetatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa bilatu. c) Zein da lortutako karratuaren perimetroa?

Sol:  $\left(2+\sqrt{\frac{3}{2}}, -2+\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right)$  eta  $\left(2-\sqrt{\frac{3}{2}}, -2-\sqrt{\frac{3}{2}}, 2\right);$

$x=2+\sqrt{\frac{3}{2}}t, y=-2+\sqrt{\frac{3}{2}}t, z=2; 4\sqrt{6}u$

34.  $A=(0,1,0)$  eta  $B=(-1,1,1)$  puntuak triangulu baten bi erpin dira eta hirugarrena (C)  $r: \begin{cases} x=4 \\ z=1 \end{cases}$  zuzeneko da. A eta C barne dituen zuzena  $r$ -ri perpendikularra da. a) Bilatu C erpinaren osagaiak. b) Kalkulatu ABC triangeluaren azalera.

Sol:  $C=(4,1,1); 5/2$

35.  $A=(2,1,2)$  eta  $B=(0,5,4)$  puntuak karratu baten aurkako bi erpin dira eta karratua  $x+y-z=1$  planoan dago. a) Bilatu beste bi erpinen osagaiak. b) Jatorkia barne duen eta A eta B puntuak osatzen duten zuzenari paraleloa den zuzenaren ekuazioa bila ezazu.

Sol:  $C=(1+\sqrt{3}, 3, 3+\sqrt{3})$  eta  $D=(1-\sqrt{3}, 3, 3-\sqrt{3}); \{x=-t, y=2t, z=t\}$

36. Izan bedi  $r: \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 6x - 3y + 10z = 6 \end{cases}$  zuzena. a) Kalkulatu A eta B zuzeneko bi puntu jakinda jatorritik 5 unitatera daudela. b) Kalkulatu AB segmentuaren M erdigunearen osagaiak.

Sol:  $A=(3,4,0)$   $B=(-4,0,3)$ ;  $M=(-1/2, 2, 3/2)$

37. Ikertu ea  $r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$  eta  $s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$  zuzenak gurutzatzen diren. Egiaz-

koan, kalkulatu beraien arteko distantzia.

Sol: Bai;  $\frac{1}{\sqrt{3}} u$



- a)  $A=(12,-1,1)$  puntutik  $v=(3,4,0)$  norabide bektorea duen eta  $P=(1,1,1)$  puntutik igarotzen den  $r$  zuzenerainoko distantzia kalkula ezazu. b) A eta P puntuak eta  $r$  zuzeneko zein puntuk (puntuak) eratzen dute 50 unitate karratuko azalera duen triangelua?

Sol:  $d=10 u$ ;  $(-5,-7,1)$  eta  $(7,9,1)$

38. Bila ezazu  $r: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 6 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$  eta  $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$  zuzenei perpendikularra denaren

ekuazioa.

$\{x=5/2+t, y=7/2-t, z=-7/2\}$