

1. 143, 156 eta 195 zenbakiak 13-ren multiploak direla jakinik, determinantea garatu gabe, froga ezazu $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ 13-ren multiploa dela.

Sol: 13k

2. Froga ezazu, garatu gabe, $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$ dela.

Sol:

3. Eztabaida ezazu a parametroaren balioen arabera ondoko sistema: $\begin{cases} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{cases}$, eta aska ezazu zehaztugabeko kasuan/etan

Sol: $a = -2$ S.B.Z.G. $\left(\frac{4+3z}{3}, \frac{2+3z}{3}, z\right) \forall z \in \mathbb{R}$; $a = 1$ S.B.E.; $a \neq 1, -2$ S.B.Z.G. $\left(\frac{a}{a-1}, \frac{2+a}{a-1}, \frac{-2(a+1)}{a-1}\right)$

4. Eztabaida ezazu m parametroaren balioa $\begin{cases} x + y = 2 \\ mx + y = 1 \\ x - y = m \end{cases}$ sistema bateragarria izan dadin,

eta ebatzi dagokion kasuan.

Sol: $m = 0$ S.B.Z. (1,1); $m = -1$ S.B.Z. (1/2, 3/2); $m \neq 0, -1$ S.B.E.

5. Bila ezazu m parametroaren balioa ondoko sistemak (0,0,0) emaitza ez dezan izan: $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my = 0 \\ 3x + mz = 0 \end{cases}$. Eta ebatzi sistema ordezkaria.

Sol: $m = -2$ S.B.Z.G. $(x, x/2, 3x/2) \forall x \in \mathbb{R}$; $m = 2$ S.B.Z.G. $(x, -x/2, 3x/2) \forall x \in \mathbb{R}$; $m = 0$ S.B.Z.G. $(0, -z, z) \forall z \in \mathbb{R}$; $m \neq -2, 2, 0$ denean emaitza nabaria du.

6. Bila ezazu a-ren balioa ondoko sistema bateragarria izan dadin, $\begin{cases} ax + 3y = 2 \\ 3x + 2y = a \\ 2x + ay = 3 \end{cases}$ A-ren

balioa sisteman ordezkatu ondoren, ebatzi sistema.

Sol: $a = -5$ S.B.Z. (-1,-1); $a \neq -5$ S.B.E.

7. Bilatu α eta β -ren balioak ondoko sistema bateragarria izan dadin: $\begin{cases} x + 2y = \alpha \\ 3x - y = \alpha - \beta \\ x - y = 4 \end{cases}$

Sol: $\alpha = 3\beta + 28$ S.B.Z. $((\alpha+8)/3, (a-4)/3)$; $\alpha \neq 3\beta + 28$ S.B.E.

8. Bila ezazu m parametroaren balioa ondoko sistemak emaitza nabaria ez dezan izan: $\begin{cases} mx + 3y + 11z = 0 \\ 3x + 2my + 23z = 0 \\ 2x - my - 8z = 0 \end{cases}$. Eta, ebatzi sistema ordezkaria.

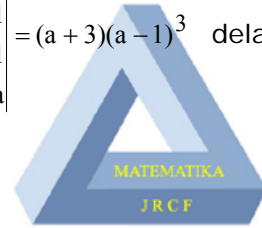
Sol: $m = 5$ S.B.Z.G. $(y/2, y, -y/2) \forall y \in \mathbb{R}$; $m = 6$ S.B.Z.G. $(3y/5, y, -3y/5) \forall y \in \mathbb{R}$; $m \neq 5, 6$ S.B.Z. soluzio nabaria

9. Eztabaida eta ebatzi k parametroaren balioen arabera ondoko sistema: $\begin{cases} 2x + ky = 0 \\ x + kz = k \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$

Sol: $k = 0$ S.B.Z.G. $(0, 5-3z, z) \forall z \in \mathbb{R}$; $k = 5$ S.B.E.; $k \neq 0, 5$ S.B.Z. $(2k/(k-5), -4/(k-5), (-7-k)/(k-5))$

10. Determinantea garatu gabe, froga ezazu $\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \cos^2 x \\ \sin^2 y & 1 & \cos^2 y \\ \sin^2 z & 1 & \cos^2 z \end{vmatrix} = 0$ dela.

11. Determinanteen propietateak erabiliz, froga ezazu $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3$ dela.



12. Garatu gabe froga ezazu: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} = 0$ dela.

13. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ eta $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizeak izanik, kalkula ezazu $I_2 + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{99}$.

Sol: $50 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

14. Aztertu sistemaren bateragarritasuna m -ren balioen arabera:
$$\begin{cases} x + my - z = 0 \\ mx + 3y = 0 \\ 2mx + 7y - mz = 0 \end{cases}$$

Sol: $m=0$ S.B.Z.G. $(x, 0, x) \forall x \in \mathbb{R}$; $m=2$ S.B.Z.G. $(x, -2x/3, -x/3) \forall x \in \mathbb{R}$; $m=-2$ S.B.Z.G. $(x, 2x/3, -x/3) \forall x \in \mathbb{R}$; $m \neq 0, 2, -2$ S.B.Z emaitza nabaria.

15. Eztabaidatu eta ebatzi ondoko sistema, a parametroaren balioen arabera:
$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3a \end{cases}$$

Sol: $a=2$ S.B.Z. $(1, 1, 1)$; $a \neq 2$ S.B.E.

16. k -ren baloreen arabera, eztabaida eta ebatzi ezazu ondoko sistema:
$$\begin{cases} x + ky + z = 2k \\ x + y - kz = 0 \\ x + y + kz = 2 \end{cases}$$

Sol: $a=1$ S.B.Z.G. $(1-y, y, 1) \forall y \in \mathbb{R}$; $a=0$ S.B.E.; $a \neq 1, 0$ S.B.Z. $((-1-a)/a, (2a+1)/a, 1/a)$

17. Kalkula ezazu ondoko determinantearen balioa:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

Sol: $abcd$

18. Aurki ezazu A -ren alderantzizko matrizea baldin eta $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ bada.

Sol: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

19. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea emanik, kalkula ezazu $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100}$

Sol: $50 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

20. Aurki ezazu A^n , $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ izanik.

Sol: $\begin{pmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{pmatrix}$



21. Eztabaida ezazu ondoko sistema m-ren balioen arabera, eta ebatz ezazu $m > 0$ baliorako:

$$\begin{cases} 2x + my - z = 0 \\ x - y + mz = 0 \\ 11x + 7y + 17z = 0 \end{cases}$$

Sol: $m=4$ S.B.Z.G. $(-5z/2, 3z/2, z) \forall z \in \mathbb{R}$; $m=-13/11$ S.B.Z.G. $(-16z/3, -5z/3, z) \forall z \in \mathbb{R}$; $m \neq 4, -13/11$ S.B.Z. emaitza nabaria

22. Eztabaida eta ebatz ezazu ondoko sistema m parametroaren arabera:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + mz = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Sol: $m=0$ S.B.Z.G. $(-y, y, 1) \forall y \in \mathbb{R}$; $m=1$ S.B.Z.G. $(1-y-z, y, z) \forall y \in \mathbb{R}$ eta $\forall z \in \mathbb{R}$; $m \neq 0, 1$ S.B.E.

23. Froga ezazu ondokoa:
$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = (1-3x)(x+1)^3$$

24. Aurki ezazu $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$ matrizea, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ izanik.

Sol: $n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n+1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

25. Ebatz ezazu $A \cdot X \cdot B = C$ matrize-ekuazio, baldin eta $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ badira.

Sol: $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

26. Aurki ezazu $A^2 - B^2$, $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ direla jakinik.

Sol: $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 2 & 8 & 10 \\ 8 & 16 & 18 \end{pmatrix}$

27. Ebatz ezazu ondoko ekuazioa:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -2 & 5 & -4 \\ x^2 & 4 & 25 & 16 \\ x^3 & -8 & 125 & -64 \end{vmatrix} = 0$$

Sol: $x=5, x=-2, x=-4$

28. Ebatz ezazu ondoko ekuazioa:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Sol: $x = -1$

29. Kalkula ezazu $X^2 + Y^2$, jakinik X eta Y ondoko sistema betetzen duten matrizeak direla:

$$4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sol: $\begin{pmatrix} 47 & 6 \\ 29 & 8 \end{pmatrix}$



30. $A = \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ matrizeak emanik, bila ezazu a-ren balioa $C = A \cdot B$

matrizearen determinantearen balioa 1000 izan dadin.

Sol: $k=10$ eta $k=-10$

31. Jakinik $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $A + A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B - B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ direla, eta A eta B

matrizeen irauliak A' eta B' direla, kalkula itzazu A eta B.

Sol: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

32. Eztabaida ezazu ondoko sistema a-ren balioen arabera:
$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 4x + 6y - az = 2 \\ x + y + az = 10 \end{cases}$$
, eta ebatz

ezazu.

Sol: $a=8$ S.B.Z.G. $(x, (12-5x)/(7, (29-x)/28)) \forall x \in \mathbb{R}; a \neq 8$ S.BE.

33. Eztabaida eta ebatz ezazu ondoko sistema a-ren balioen arabera:
$$\begin{cases} 2y - z = a \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = a \end{cases}$$

Sol: $a=6$ S.B.Z. $(5, 4, 2)$; $a \neq 6$ S.BE.

34. Aurki itzazu k-ren balioak, zeintzuetarako $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix}$ matrizeak alderantzizkorik ez

duen. Kalkula ezazu A^{-1} , $k=2$ kasuan

Sol: $k=1$ eta $k=3$ denean; $k=2$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

35. Aurki ezazu $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$ matrizea, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ izanik.

Sol: $\begin{pmatrix} n & n+n^2 \\ 0 & n \end{pmatrix}$

36. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea emanik, aurki itzazu $A B = B A$ berdintza betetzen duten B matrize guztiak.

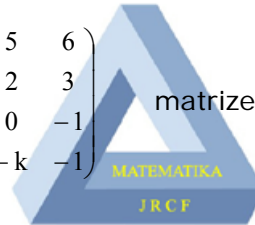
Sol: $\begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix}$

37. Aurki itzazu k -ren balioak, zeintzuetarako

$\begin{pmatrix} k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$ matrizeak: a)

alderantzizkorik ez duen. b) 3 heinekoa den.

Sol: $k=0$ eta $k=11/9$ ez du alderantzizkorik; $k \neq 0$ eta $11/9$ hein(A)=3



38. Eztabaida eta ebatz ezazu ondoko sistema, m parametroaren balio desberdinen arabera:

$$\begin{cases} x + (2m + 1)y - mz = 0 \\ x + my - z = 0 \\ (m - 2)x - y + z = 0 \end{cases}$$

Sol: $m=0$ S.B.ZG. $(z, -z, z) \forall z \in \mathbb{R}$; $m=1$ S.B.ZG. $(-z/2, z/2, z) \forall z \in \mathbb{R}$; $m=3$ S.B.ZG. $(z, 0, z) \forall z \in \mathbb{R}$; $m \neq 0, 1, 3$ S.B.Z. emaitza nabaria

39. Determinanteen propietateak erabiliz, kalkula ezazu

$\begin{vmatrix} x & y & y & y \\ y & x & y & y \\ y & y & x & y \\ y & y & y & x \end{vmatrix}$ determinantea. Sinplifika

ezazu emaitza.

Sol: $(x+3y)(x-y)^3$

40. Aurki itzazu x -en balioak, zeintzuetarako A matrizeak alderantzizkorik ez duen.

$A = \begin{pmatrix} |x| & 1 \\ |x-2| & 2 \end{pmatrix}$

Sol: $\frac{x-2}{2x} \geq 0 \quad x=-2$ eta $\frac{x-2}{2x} < 0 \quad x=2/3$

41. Askatu emandako ekuazioa eta egin egiaztapena:

$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 3 & 1 & x & 2 \\ 3 & 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$

Sol: $x=-6, x=1, x=2, x=3$

42. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ emanik eta A -ren iraulia A^t dela jakinik, bila itzazu a -ren balioak $B^{-1} = (A A^t)^{-1}$ matrizea egon dadin. Aurki ezazu, posible bada, B matrizearen alderantzizkoa $a=1$ den kasuan.

Sol: $\forall a \in \mathbb{R}$ alderantzizkoa du; $a=1$ denean $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

43. Ebatz ezazu ondoko ekuazioa:

$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ Egiazta ezazu emaitza.

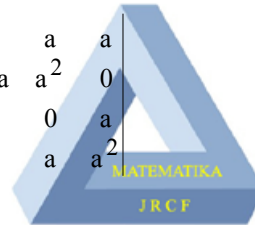
Sol: $x=1$ eta $x=-1$

44. Eztabaida ezazu ondoko sistema m parametroaren balioen arabera:
$$\begin{cases} (m+1)x + y + z = 3 \\ x + 2y + mz = 4 \\ x + my + 2z = 2 \end{cases}$$

Ebatz ezazu indeterminazio kasuetan.

Sol: $m=0$ S.B.ZG. $(x, (4-x)/2, (2-x)/2) \forall x \in \mathbb{R}$; $m=2$ S.B.E.; $m=3$ S.B.E.; $m \neq 0, 2, 3$ S.B.Z.

45. Kalkula ezazu ondoko determinantearen balioa:
$$\begin{vmatrix} a^2 & 1 & a & a \\ 0 & 1+2a & a^2 & 0 \\ a^2+a & 1 & 0 & a \\ a & 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$$



Sol: $(a+1)^2(a-1)(-2a^3)$

46. Eztabaida eta ebatz ezazu ondoko sistema a parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ ax - y + z = a \\ x - ay + 3z = a \end{cases}$$

Sol: $a=3$ S.B.E.; $a=-1$ S.B.ZG. $((1-2y)/2, y, -1/2) \forall y \in \mathbb{R}$; $m \neq 3, -1$ S.B.Z. $(1, (1-a)/(a-3), (1-a)/(a-3))$

47. Kalkula ezazu $A^{250} + A^{20}$ matrizea, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea dela jakinik.

Sol: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 270 & 2 \end{pmatrix}$

48. Kalkula itzazu ondoko baldintzak betetzen dituzten A eta B matrizeak:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ eta } 2A - 2B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sol: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrizeak emanik, aurki itzazu a, b, c eta d koefizienteek bete behar dituzten baldintzak $AB = BA$ berdintza egiazta dadin.

Sol: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

50. Eztabaidatu arrazoituz a eta b -ren funtziopean A matrizearen heina,

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 12 & 6 \\ b & 1 & 4 & 2 \\ a+b & 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

Sol: $a=3b$ denean $\text{hein}(A)=1$ eta $a \neq 3b$ denean $\text{hein}(A)=2$

51. Sarrus-en erregela erabili gabe kalkulatu ondoko matrizearen determinantea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^3 & b^3 & c^3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol: $-(a-1)(b-1)(c-1)(a-c)(b-c)(b-a)$

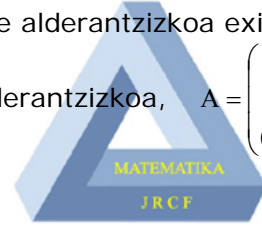
52. Eztabaida ondorengo sistema a parametroaren arabera: $S: \begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases}$ Ebatzi

bateragarri zehaztugabea denean.

Sol: $a \neq 1, 2$ S.B.Z.; $a = 1$ S.B.E.; $a = 2$ S.B.Z.G. $(1-t, 0, t) \forall t \in \mathbb{R}$

53. Zein da matrize karratu batek bete behar duen baldintza bere alderantzizkoa existitzeko?

Existitzen deneko kasuetan kalkulatu ondoko matrizearen alderantzizkoa, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$



Sol: ...; $\frac{1}{a(a-2)} \begin{pmatrix} a^2 & -2a & 0 \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$

54. Eztabaida ezazu ondoko sistema a parametroaren arabera, $S: \begin{cases} x + 2y + z = a \\ x + 2y + 3z = 3a \\ 2x + 4y + az = 4 \end{cases}$ Ebatzi,

posible bada, $a = -2$ denean.

Sol: $a \neq 2, -2$ S.B.E.; $a = 2$ S.B.Z.G.; $a = -2$ S.B.Z.G. $(-2y, y, -2) \forall y \in \mathbb{R}$

55. Izan bedi A honako matrize hau: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$. Aurkitu A^n matrizearen adierazpen

orokorra n zenbaki arrunta izanik eta kalkulatu bere determinantea.

Sol: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1/3^{n+1} \end{pmatrix} \quad |A^n| = 1$

56. Kalkulatu A matrizea ondoko berdintza betetzen dela jakinik: $A \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Jarraitutako metodoa azaldu

Sol: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$

57. Izan bitez A eta B ondoko matrizeak: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aztertu a , b eta c

koefizienteek bete behar dituzten baldintzak $A \cdot B = B \cdot A$ bete dadin.

Sol: $a = c$ eta $b = c$

58. Izan bedi E honako matrize hau: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Aurkitu E^n matrizearen adierazpen orokorra n zenbaki arrunta izanik eta kalkulatu $E^{10} - E^5$.

Sol: $E^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 992 & 992 \end{pmatrix}$

59. Izan bedi ondoko ekuazio linealetako sistema
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{cases}$$
 Aurkitu a

parametroaren balio bat sistema bateraezina izan dadin. Aztertu a parametroaren balioen bat existitzen den zinetarako sistema bateragarri zehatza den. Ebatzi aurreko sistema $a=0$ denean.

Sol: $a \neq 2$ S.B.ZG.; $a=2$ S.BE.; $a=0$ $(-2-3t, -1/2, t) \forall t \in \mathbb{R}$

60. Aztertu ondoko sistemaren bateragarritasuna a parametroaren arabera:

$$S \equiv \begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ 3x + ay + z = 2 \end{cases}$$
 . Ebatzi aurreko sistema bateragarri zehatza deneko kasuetan.

Sol: $a=0$ S.B.ZG.; $a=-1$ S.BE.; $a \neq 0, -1$ S.B.Z $(1/2, 1/(2+2a), 1/(2+2a))$



61. Kalkulatu ondoko determinantearen balioa a, b eta c parametroen funtzioan
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

Sol: $-(a-b)(a-c)(b-c)(ab+ac+bc)$

62. Arrain-saltzaile batek aste jakin bateko asteartean 96 kg legatza eta 130 kg antxoa erosi zituen, orotara 1836 euro ordaindu zituelarik. Hurrengo asteazkenean, behi eroen efektua dela eta, legatzaren prezioa ehuneko 20a igo zen eta antxoarena ehuneko 30a. Egun horretan 40 kg legatza eta 50 kg antxoa erosi zituen, orotara 918 euro ordaindu zituelarik. Nahikoa al dira aurreko datuak astearteko legatza eta antxoaren prezioak kalkulatu ahal izateko? Erantzuna baiezkoa izatekotan prezioak kalkulatu, ezezkoa izatekotan argudiatu zergatik ezin den kalkulu hori egin.

Sol: Emandako datuak ez dira nahiko...

63. Aztertu ondoko sistemaren bateragarritasuna a parametroaren balioaren arabera:

$$S \equiv \begin{cases} 4x + 2y + 2z = 2a \\ ax + y + z = 1 \\ 2x + y + az = 1 \end{cases}$$
 . Sistema ebatzi bateragarri zehaztugabea denean.

Sol: $a=1$ S.B.ZG. $(0, 1-z, z) \forall z \in \mathbb{R}$; $a=2$ S.BE.; $a \neq 1, 2$ S.B.Z.

64. Aztertu ondoko ekuazio sistema, a parametroaren arabera:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + ay + az = 5 \\ 4x + az = 5 \end{cases}$$
 . Ebatzi

aurreko sistema bateragarri zehatza (determinatua) denean.

Sol: $a=0$ S.BE.; $a=-5$ S.B.ZG.; $a \neq 0, -5$ S.B.Z. $(1, 1/a, 1/a)$

65. Izan bitez A eta B ondoko matrizeak:
$$A = \begin{pmatrix} 2x & 2 & 3+x \\ 2 & x & 5 \\ 10 & 6 & x+5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{pmatrix}$$
 . B matrizearen

determinantearen balioa 7 dela jakinik, erabili determinanteen propietateak A matrizearen determinantea kalkulatzeko.

Sol: 14

66. Aztertu ondoko sistema a parametroaren balioaren arabera:
$$S \equiv \begin{cases} 2x + y + z = a \\ 2x + y + 2z = 2a \\ 2x + y + 3z = 3 \end{cases}$$

Ebatzi bateragarri den kasuetan

Sol: $a=1$ S.B.ZG. $(-y/2, y, 1) \forall y \in \mathbb{R}$; $a \neq 1$ S.BE.

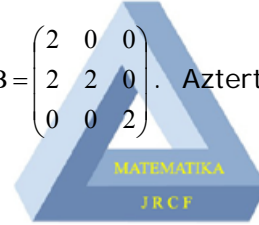
67. Izan bitez A ondoko matrizea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ eta n zenbaki arrunta. Aurkitu A^n matrizearen adierazpena n bakoitzerako eta kalkulatu $A^{350} - A^{250}$

Sol: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix}$

68. Izan bitez A eta B ondoko matrizeak: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Aztertu $A - \lambda B$

matrizearen heina λ parametroaren balioen arabera.

Sol: $\lambda=0, \lambda=3, \lambda=1/2$ denean hein() $=2$; beste kasu guztietan hein() $=3$



69. a parametroaren balio bakoitzeko, izan bedi $A(a)$ ondoko matrizea: $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kalkulatu $A^2(a) - A^t(a)$ matrizearen heina a balioaren arabera. Gogoratu $A^2(a)$ matrizea $A(a) \cdot A(a)$ biderkadura dela eta $A^t(a)$ hasierako matrizearen iraulia.

Sol: $a=0$ edo $a=\sqrt{2}$ edo $a=-\sqrt{2}$ hein() $=2$; $a \neq 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ hein() $=3$

70. Izan bedi $S: \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y = 0 \\ 3x + 2y + az = 2a \end{cases}$ ekuazio-sistema. a) Frogatu bateragarria dela a

parametroaren balio guztietarako. b) Ebatzi bateragarri zehaztugabea (indeterminatua) den kasuan.

Sol: frogapena; $a=1$ ($x, -2x, 2+x$) $\forall x \in \mathbb{R}$

71. Aztertu $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = a \\ 3x + y + az = 2 \end{cases}$ sistemaren bateragarritasuna a parametroaren balioen arabera.

Posible denean bilatu soluzioak.

Sol: $\left(a-1, \frac{-5+5a-a^2}{a-1}, \frac{3-2a}{a-1} \right)$

72. Izan bitez A eta B ondoko matrizeak $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ Bi matrizeen

determinantea 1 dela jakina da. Datu nahiko al daude a eta b parametroen balioak kalkulatzeko? Erantzuna baiezkoa izatekotan balio horiek aurkitu, bestela erantzuna arrazoitu.

Sol: Bai, $a=3$ eta $b=8$

73. Aztertu $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + Ay + 3z = 0 \\ x + y + z = A \end{cases}$ sistemaren bateragarritasuna A parametroaren balioen arabera.

Ebatzi aurreko sistema bateragarri zehaztugabea (indeterminatua) den kasuan.

Sol: $a=2$ S.B.ZG. ($z+4, -2-2z, z$) $\forall z \in \mathbb{R}$; $a \neq 2$ S.B.Z.

74. Izan bedi $S: \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = 9 \\ 3x + 4y + mz = 2(m+1) \end{cases}$ ekuazio linealetako ondoko sistema. Existitzen al da

m parametroaren baliorik non sistema zehaztugabea den? Ezezkoan erantzuna arrazoitu. Erantzuna baiezkoa izatekotan sistemaren soluzioa aurkitu kasu horretan.

Sol: $m=5$ S.B.ZG. $(z, 3-2z, z) \forall z \in \mathbb{R}$

75. Izan bedi A ondoko matrizea: $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aurkitu A^n matrizea n zenbaki arrunt bakoitzerako. Kalkulatu $A^{22} - 12 \cdot A^2 + 2 \cdot A$

Sol: $\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$



76. Izan bedi A ondoko matrizea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$. A matrizean jarraian aipatutako

transformazioak egin eta gero B matrizea lortzen da: lehenik A matrizea bere buruaz biderkatzen da, jarraian bigarren eta hirugarren errenkadak trukutzen dira eta bukatzeko bigarren zutabearen elementu guztiak -2 zenbakiaz biderkatzen dira. Determinanteen propietateak erabiliz, kalkulatu B matrizearen determinantea

Sol: 288

77. Izan bedi $S: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ Ax + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = A \end{cases}$ ekuazio linealetako ondoko sistema. Aztertu sistemaren

bateragarritasuna A parametroaren balioaren arabera. Ebatzi $A=5$ deneko kasuan.

Sol: $A=3$ S.B.ZG.; $A \neq 3$ S.B.Z.; $A=5$ S.B.Z. $(-1, 6, -5)$

78. Izan bedi $S: \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + 4y + 9z = 14 \\ x + 8y + Az = \frac{10}{7}A \end{cases}$ ekuazio linealetako sistema. Aztertu sistemaren

bateragarritasuna A parametroaren arabera. Ebatzi $A=0$ deneko kasuan.

Sol: $A \neq 21$ S.B.Z.; $A=21$ S.B.ZG.; $A=0$ S.B.Z. $(16/7, -2/7, 10/7)$