Ekuazio Linealetako Sistemak

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aldagaiak dituen **ekuazio linealetako sistema** m berdintzaz osaturiko multzo bat da; ondoko eran emandakoa:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{ij} ezezagunen <u>koefizienteak</u> eta b_i sistemako <u>gai askeak</u> direlarik.
a_{ij} ezezagunetan i azpindizeak koefiziente hura agertzen den sistemako ekuazioa zein den adierazten du eta j azpindizeak zein aldagairen koefizientea den.

n ezezagun eta m ekuazio lineal dituen aurreko sistema matrizeen bidez adieraz daiteke ondoko eran:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ezkerretik eskuinera, lehen matrizea **koefiziente-matrizea** (**A**) da, bigarren matrizea ezezagunen matrizea (**X**) eta hirugarren matrizea gai askeen matrizea (**B**)
Notazio horrekin, aurreko ekuazio linealetako sistema honela adieraz daiteke:

A·X=B

A matrizeari gai askeek osatzen duten zutabea gehitzen bazaio, **matrize zabaldua** (**A**|**B**) lortzen da.

$$A|B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & . & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & . & b_m \end{pmatrix}$$

Sistema lineal baten ebazpena bere soluzio guztiak bilatzean datza; hau da, ekuazio guztiak batera bete daitezen ezezagun bakoitzari eman behar zaizkion balioak bilatzean datza.
Sistemaren soluzioak $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ n-koteak dira non x_i aldagaiak s_i $(i=1,2,\ldots,n)$ balioekin ordezkatzerakoan, ekuazio lineal guztiak identitate bihurtzen diren.

Ekuazio linealetako sistema motak

EKUAZIO LINEALETAKO SISTEMAK

$$\begin{cases} \text{HOMOGENEOAK} & \{\text{BATERAGARRIAK} \\ \text{EZ HOMOGENEOAK} & \begin{cases} \text{BATERAGARRIAK} & \begin{cases} \text{ZEHAZTUAK} \\ \text{ZEHAZTUGABEAK} \end{cases} \\ \text{BATERAEZINAK} \end{cases} \end{cases}$$

Ekuazio-sistema bat **bateragarria** da ***soluzioa*** duenean.
Ekuazio-sistema bat **bateragarri zehaztua** da ***soluzio bakarra*** duenean.
Ekuazio-sistema bat **bateragarri zehaztugabea** da ***infinitu soluzio*** dituenean.
Ekuazio-sistema bat **bateraezina** da ***soluziorik ez*** duenean.

Ekuazio sistema bat **homogeneoa** da gai aske guztiak zero direnean

Ekuazio linealetako sistemen ebazpena

- ## Gauss-en laburketa-metodoa

Emandako ekuazio sistema baliokidea den batean bihurtzean datza Gauss-en laburketa-metodoa. Horretarako matrize zabaldua hartzen da eta lerroka oinarrizko eragiketak aplikatuz matrize triangeluar bat bihurtzen da. Horrela, hasierakoarekin baliokidea den sistema bat lortzen da, baina, ebazteko askoz errazagoa (sinpleagoa)

Adibidea

Izan bedi $\begin{cases} x+y+x=3 \\ x+y-z=1 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$ ekuazio sistema. Ebatzi

Ekuazio-sistema horri dagokion matrize zabaldua ondokoa da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Bigarren eta hirugarren errenkadei lehena kentzen badiegu, ondokoa lortzen da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Bigarren eta hirugarren errenkadak elkar trukatzen badira, ondokoa lortzen da:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Lortutakoa, ondoko ekuazio-sistemaren matrize zabaldua da:

$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ -2y-2z &= -4 \\ -2z &= -2 \end{cases}$$

Hau da, emandako sistemaren baliokidea (Soluzio berdinak dituena)

Hirugarren ekuaziotik z bakantzerakoan z=1 lortzen da
Lehenengo eta bigarren ekuazioetan (z=1) ordezkatuz geratzen diren ekuazioak ondokoak dira:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x+y+1 & = & 3 \\ -2y-2 & = & -4 \end{array} \right.$$

Bigarren ekuaziotik y bakantzerakoan y=1 lortzen da. Lehen ekuazioa (y=1) ordezkatzerakoan eta x bakandu, x=1 lortzen da.
Beraz, sistemaren soluzioa x=y=z=1 da

Alderantzizko matrizearen metodoa

Ekuazio linealetako sistema bat matrize forman ipin daiteke:

$$\mathbf{A \cdot X = B}$$

$\mathbf{A^{-1}}$ existitzen bada (A matrize karratu baten determinantea eta nulua ez dena), orduan aurreko berdintza guztia ezkerretik A^{-1} matrizearekin biderka daiteke, ondokoa lortzeko:

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$$

Cramer-en erregela

Cramer-en erregela aplika daiteke ezezagunen koefizienteen matrizea karratua denean (ezezagun-kopurua eta ekuazio-kopurua berdina) eta bere determinantea desberdin zero denean.

Izan bedi ekuazio linealetako sistema bat:

$$\left. \begin{array}{c} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array} \right\}$$

Bere soluzioa ondoko eran emanda dator:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}}{|A|}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & b_m & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}}{|A|}, \qquad \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots, \qquad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & b_m \end{vmatrix}}{|A|}$$

Orokorrean honela adierazten delarik:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

A_i matrizea honela lortuz: A matrizeko i zutabea gai askeen matrizearekin ordezkatuz.

Adibidea

Izan bedi $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ekuazio-sistema:

Sistema horretako ezezagunen matrizea karratua da eta bere determinantea

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Hau da, Cramer-en erregela aplika daiteke.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{-2} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{-2} = 1$$

▪ Rouche-Fröbenius-en teorema

m ekuazio lineal eta n ezezagun dituen ekuazio-sistema bat bateragarria (soluzioa duena) da baldin eta soilik baldin koefizienteen matrizearen heina eta matrize zabalduaren heina berdinak badira.

Gainera, bateragarria denean bi posibilitate daude:

1. Koefizienteen matrizearen heina txikiagoa ezezagun-kopurua baino. Orduan, sistema bateragarri zehaztugabea (indeterminatua) dela esaten da.
2. Koefizienteen matrizearen heina berdina ezezagun-kopuruari. Orduan, sistema bateragarri zehaztua (determinatua) dela esaten da.

Sistema homogeneoa denean

Sistema bat homogeneoa denean, gai askeek osatzen duten matrizea nulua da eta, ondorioz, koefizienteen matrizearen heina eta matrize zabalduarena berdinak dira. Rouche-ren teorema aplikatuz, sistema homogeneo bat beti da bateragarria eta beti du gutxienez, soluzio nabaria.

Sistema homogeneo bat bateragarri zehaztugabea (infinitu soluzio)izango da koefizienteen matrizearen determinantea zero denean. Determinante hura desberdin zero denean sistema bateragarri zehaztua (soluzio nabaria) da.

Parametrodun sistemak.

Sistema batzuetan koefiziente edota gai aske batzuk parametroen bidez ordezkatzen dira. Parametro horiek edozein balio har dezakete.
Parametro horien balio bakoitzarentzat sistema desberdin bat lortzen da, eta arazoa zera da: parametroaren balioentzat sistema bateragarria edo bateraezina den ikertzea. Bateragarria den kasuetan aurreko ebazpen metodoetariko bat erabilita soluzioak bilatzen dira.

Adibidea

Eztabaidatu eta askatu ondoko sistema a parametroaren balioen arabera.

$$\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+y+z=a \\ x-y+az=2 \end{cases}$$

a) Eztabaida

$$|A| = (a-1)(a+1)$$

- **a=1** denean $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ hein(A)=2 eta hein(A')=3. Sistema bateraezina da.
- **a= -1** denean $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ hein(A)=2 eta hein(A')=3 Sistema bateraezina da.
- **a≠1** eta **a≠ -1** denean sistema bateragarri zehaztua da.

b) Ebazpena

Bakarrik bateragarriak diren kasuak kontutan izango ditugu. Hau da, **a≠1** eta **a≠ -1** denean.

Eta Gauss-en metodoa erabiliz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \left\langle \begin{matrix} E2-E1 \\ E3-a\,E1 \end{matrix} \right\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & a-1 & 2-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a^2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\langle (1-a)\,E2-(-2)\,E3 \rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & a-1 & 2-a \\ 0 & 0 & (a+1)(1-a) & (2-a)(5+a) \end{pmatrix}$$

Soluzioa: $\left(\dfrac{4-a}{a-1}, \dfrac{a^2+a-6}{a+1}, \dfrac{a^2+3a-10}{a^2-1} \right)$