

1. Izan bedi $f(x) = x|x - 2|$ funtzioa,
- Ikertu deribagarritasuna $x=2$ denean
 - Egin bere adierazpen grafikoa
 - Kalkulatu funtzioaren grafikoa eta abzisa ardatzak mugatzen duten barrutiaren azalera.

Sol.: $R - \{2\}$ osoan deribagarria; $A = 4/3 u^2$

2. Izan bedi $f(x) = \ln(x+1)$ funtzioa,
- Aurkitu kurba horren zuzen ukitzaila $x=0$ den puntuan.
 - Funtzioaren adierazpen grafikoa, aurreko atalean lortutako zuzen ukitzaila eta $x=1$ zuzenak mugatzen duten barrutiaren azalera kalkulatu ezazu.

Sol.: $y=x$ ukitzaila; $A = 3/2 - 2 \ln(2) u^2$

3. Izan bitez $f(x) = x^3 + 3x^2$ eta $g(x) = x + 3$ funtzioak,
- Egin ezazu $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioen adierazpen grafikoa, haien arteko ebaki puntuak bilatuz.
 - Kalkulatu $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioen artean mugaturiko azalera.

Sol.: $8 u^2$

4. Izan bitez $f(x) = e^{x-1}$ eta $g(x) = e^{1-x}$ funtzioak,
- Egin ezazu $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioen adierazpen grafikoa, haien arteko ebaki puntuak bilatuz.
 - Kalkulatu $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioak eta OY ardatzak mugaturiko azalera.

Sol.: $-2 + e + 1/e u^2$

5. Izan bedi $f(x) = x(x-3)^2$ funtzioa,
- Kalkulatu funtzioaren gorakor- eta beherakor-tarteak.
 - Egin funtzioaren adierazpen grafikoa.
 - Kalkulatu funtzioak eta abzisa ardatzak mugaturiko azalera.

Sol.: $x > 3$ gorakorra eta $x < 3$ beherakorra; $A = 27/4 u^2$

6. Izan bedi $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x}, & -2 < x \leq -1 \\ \frac{x^2 - \beta}{2}, & -1 < x < 0 \end{cases}$ funtzioa,

a) Bilatu α eta β $f(x)$ funtzioa deribagarria izan dadin.

b) Kalkulatu $\int_{-2}^{-1} f(x) dx$

Sol.: $\alpha = 1$ eta $\beta = 3$; $-\ln(2)$

7. Izan bedi $f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ funtzioa,

a) Bilatu α -ren balioa funtzioa deribagarria izan dadin.

b) Kalkulatu $\int_{-1}^1 f(x) dx$. Zer adierazten du emaitzak?

Sol.: $\alpha = -1$; $5/2 - 1/e$

8. $f(x) = x^2$ eta $g(x) = -x^2 + 2\beta^2$ funtzioek mugaturiko azalera 72 unitate karratu bada, kalkulatu $\beta > 0$ balioa.

Sol.: $\beta = 3$

9. Izan bedi $f(x)=x^2$ funtzioa,
 a) Bilatu funtzioari $x=1$ abzisa duen puntuan ukitzaila den zuzena.
 b) Funtzioak, lortutako zuzen ukitzailak eta abzisa ardatzak mugaturiko barrutia irudika ezazu.
 c) Kalkulatu barrutiaren azalera.

Sol.: $y=2x-1$; $1/12 u^2$

10. Izan bedi $f(x)=\begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0 \\ x e^{-x^2}, & x < 0 \end{cases}$ funtzioa,

- a) Ikertu deribagarritasuna $x=0$ denean eta, posible baldin bada, kalkulatu deribatua $x=0$ denean.
 b) Funtzioaren grafikoak, abzisa ardatzak eta $x=-1$ zuzenak mugaturiko azalera kalkula ezazu.

Sol.: $x=0$ jarraitua, $f'(0)=1$ existitzen da; $A=1/2(1-1/e) u^2$

11. Izan bedi $f(x)=\begin{cases} -a, & x \leq -1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ funtzioa,

- a) Bilatu a -ren balioa funtzioa jarraitua izan dadin.
 b) Egin adierazpen grafikoa.
 c) Funtzioaren grafikoak, abzisa ardatzak eta $x+2=0$ eta $x-2=0$ zuzenek mugaturiko azalera kalkula ezazu.

Sol.: $a=2$; $A=2 \ln(2)+6 u^2$

12. Kalkulatu $\int_0^{-2} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

Sol.: $\frac{2\sqrt{5}+2}{3}$

13. $y = \frac{x^2}{a}$ eta $y = \sqrt{ax}$, $a > 0$, funtzioek mugaturiko azalera $3 u^2$ da. Kalkulatu a -ren balioa.

Sol.: $a=3$

14. a) Izan bedi $f(x)=ax^2+b$ funtzioa. Kalkulatu a eta b -ren balioak jakinda $\int_0^6 f(x) dx = 6$ dela eta funtzioari ukitzaila zen zuzenaren malda $x=3$ denean -12 dela.
 b) Izan bedi $f(x)=x^2+px+q$ funtzioa. Kalkulatu p eta q -ren balioak funtzioak $x=-6$ denean -2 balio duen mutur erlatiboa duela.

Sol.: $a=2$ eta $b=-23$; $p=12$ eta $q=34$

15. $f(x)=\sin(x)$ funtzioak eta $x=0$ eta $x=\pi$ den puntuetan ukitzailak diren zuzenak mugaturiko azalera bila ezazu.

Sol.: $\frac{\pi^2}{4} - 2 u^2$

16. Izan bitez $f(x)=x^2$ eta $g(x)=\lambda\sqrt{x}$ funtzioak, non λ zenbaki erreal positibo bat den. Bilatu λ -ren balioa bi funtzioek mugaturiko azalera $1/3$ bada.

Sol.: $\lambda=1$ eta $\lambda=-1$



17. Izan bedi $f(x) = \begin{cases} \ln(x), & 0 < x \leq 1 \\ \ln(2-x), & 1 < x < 2 \end{cases}$ funtzioa,

a) Ikertu funtzioaren deribagarritasuna $x=1$ denean.

b) Kalkulatu $\int_1^{1.5} f(x) dx$

Sol.: Ez da deribagarria; $-1/2 (\ln(2)+1)$

18. Kalkula ezazu $y = \frac{15}{1+x^2}$ eta $y = x^2 - 1$ kurbek mugaturiko azalera.

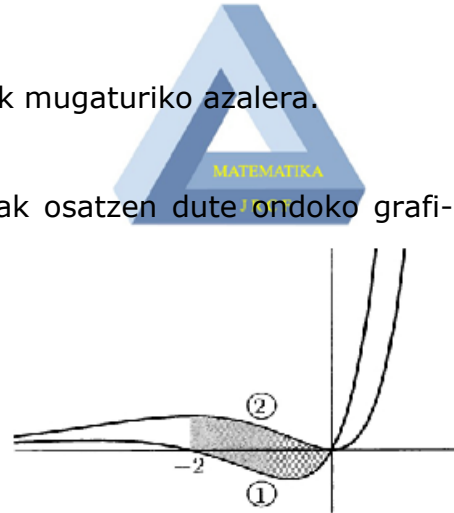
Sol.: $-4/3 + 30 \arctan(2)$

19. $f(x) = x^2 e^x$ funtzioak eta bere funtzio deribatuak osatzen dute ondoko grafikoa.

a) Adierazi, arrazoituz, zein den $f(x)$ -ri dagokion kurba eta zein $f'(x)$ -ri dagokiona.

b) Kalkulatu markatutako zonaldearen azalera.

Sol.: 1 $f'(x)$ eta 2 $f(x)$; $A = 2 - 6e^{-2} u^2$



20. Izan bedi $f(x) = e^{-x/2}$ funtzioa,

a) Kalkulatu $x=0$ abzisa puntuan zuzen ukitzaillearen ekuazioa.

b) Funtzioak, $x=2$ zuzenak eta zuzen ukitzailleak mugatutako azalera kalkula ezazu.

Sol.: $y = -x/2 + 1$; $(1-2/e) u^2$

21. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax}, & 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 31}{x - 4}, & x > 9 \end{cases}$ funtzioa $[0, \infty)$ tartean jarraitua da.

a. Kalkulatu a -ren balioa.

b. Kalkulatu $\int_0^{10} f(x) dx$

Sol.: $a=8$; $128/3$

22. Izan bedi $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \leq 0 \\ (x-2)^2, & x > 0 \end{cases}$ funtzioa,

a) Bilatu abzisa ardatzarekin ebaki-puntua. Egin adierazpen grafikoa.

b) Funtzioak eta abzisa ardatzak mugaturiko azalera bila ezazu.

Sol.: $(-2, 0)$ eta $(2, 0)$; $20/3 u^2$

23. Kalkulatu $\int_{-1}^0 \ln(2+x) dx$

Sol.: $2 \ln(2) - 1$

24. Izan bedi $f(x) = x^2 - 5x + 4$ funtzioa,

a) Kalkulatu $x=3$ abzisa puntuan ukitzaillea den zuzenaren ekuazioa.

b) Kalkulatu ordenatu ardatzak, funtzioak eta lortutako ukitzailleak mugaturiko azalera.

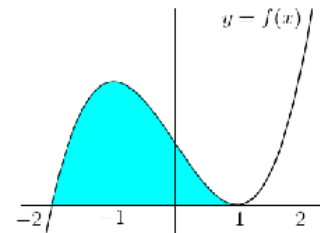
Sol.: $y = x - 5$; $9u^2$

25. $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ funtzioaren adierazpen grafikoa ondokoa da.

a) Kalkulatu $f(x)$ funtzioa.

b) Kalkulatu markatutako zonaldearen azalera.

Sol.: $f(x)=x^3-3x+2$; $A=27/4 \text{ u}^2$



26. Funtzio bati buruz zera ezagutzen da: $f(0)=2$ dela eta $f'(x)=2x$ dela.

a) Kalkulatu $f(x)$ funtzioa.

b) Funtzioaren kurbak, abzisa ardatzak eta $x=-2$ eta $x=2$ zuzenek mugaturiko azalera bila ezazu.

Sol.: $f(x)=x^2+k$; $40/3 \text{ u}^2$

27. Kalkulatu $I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} dx$ ($\sqrt{1+x}-1=t$)

Sol.: $2(1+\ln(2))$

28. Izan bedi $f(x)=x \cdot |x|$ funtzioa,

a) Funtzioak eta lehen eta hirugarren koadranteko erdikariak mugaturiko barrutia irudika ezazu.

b) Kalkulatu barrutiaren azalera.

Sol.: $1/3 \text{ u}^2$

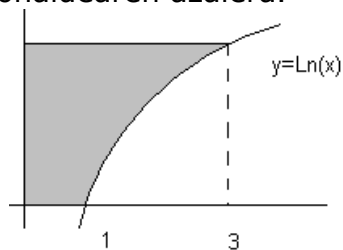
29. Izan bedi $f(x)=e^x+4e^{-x}$ funtzioa,

a) Kalkulatu gorakor- eta beherako-tarteak eta mutur erlatiboak.

b) Funtzioaren kurbak, abzisa ardatzak eta $x=0$ eta $x=2$ zuzenek mugaturiko azalera kalkula ezazu.

Sol.: $(\ln(4)/2, \infty)$ gorakorra, $(-\infty, \ln(4)/2)$ beherakorra; $3+e^2-4/e^2 \text{ u}^2$

30. Kalkulatu markatutako zonaldearen azalera.



Sol.: 2 u^2

31. Kalkulatu $y=x$ zuzenak eta $y=x^2$ eta $y=x^2/2$ kurbek mugaturiko azalera.

Sol.: 4 u^2

32. Kalkulatu $\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2+2x-3} dx$

Sol.: $-1/2 \ln(3)$

33. Kalkulatu $\int_1^9 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

Sol.: $4-2 \ln(2)$

34. Izan bedi $f(x) = \frac{-1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$ funtzioa,

a) Kalkulatu $y=1$ ordenatuen ukitzailea den zuzenaren ekuazioa, jakinda malda negatiboa duela.

b) Kalkulatu $f(x)$ funtzioak, zuzen ukitzaileak eta ordenatu ardatzak mugaturiko azalera.

Sol.: $y = -2/3x + 7/3$; $8/5 u^2$

35. Izan bitez $f(x) = \ln(x)$ eta $g(x) = 1 - 2^x$ funtzioak. Kalkulatu bi funtzio horiek eta $x=1$ eta $x=2$ zuzenek mugaturiko azalera.

Sol.: $2 \ln(2) - 2 + 4/\ln(2) - 2/\ln(2)$



36. Kalkulatu b -ren balioa, $b > 0$, jakinda $y = \left(\frac{1}{3}x - b\right)^2$ parabolak eta ardatz

koordinatuak mugaturiko azalera $8 u^2$ dela.

Sol.: $b=2$

37. Kalkulatu b -ren balioa, $b > 0$, jakinda $y = x^2$ parabolak eta $y = 6x$ zuzenak mugaturiko azalera $9/2 u^2$ dela.

Sol.: $b=3$

38. Izan bedi $f(x) = e^{x/3}$ funtzioa,

a) Kurbari ukitzailea den zuzena jatorritik pasatzen da, zein puntutan ukitzen du kurba? Kalkulatu ukitzailearen ekuazioa.

b) Kalkulatu funtzioak, lortutako ukitzaileak eta ordenatu ardatzak mugaturiko azalera.

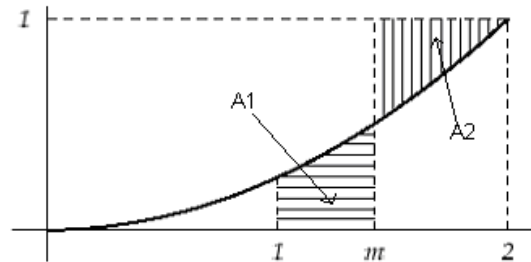
Sol.: $(3, e)$, $y - e = e/3(x - 3)$; $3/2 e - 3 u^2$

39. $f(x) = ax^2 + bx + c$ funtzioak $x=1$ abzisa puntuan maximo absolutua du, kurba $(1, 4)$ puntutik igarotzen da eta $\int_{-1}^3 f(x) dx = 16 u^2$. Kalkulatu a , b eta c -ren balioak.

Sol.: $a=b=0$ $c=4$

40. $y = x^2/4$ parabolaaren adierazpen grafikoa $[0, 2]$ tartean ondoko irudikoa da. Kalkulatu m -ren balioa marraztutako azalerak ($A_1 = A_2$) aberdinak izan daitezen.

Sol.: $17/12$



41. Izan bedi $f(x) = x^2 - 2x + 2$ funtzioa,

a) Kalkulatu $x=3$ abzisa puntuan ukitzailearen ekuazioa.

b) Kalkulatu kurbak, zuzen ukitzaileak eta OY ardatzak mugaturiko azalera.

Sol.: $y = 4x - 7$; $9 u^2$

42. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ funtzioak $x=0$ abzisan mutur erlatibo bat du eta $x=-1$ abzisan inflexio-puntu bat; gainera, $\int_0^1 f(x) dx = 6$ da. Kalkulatu a , b eta c .

Sol.: $a=3$, $b=0$ eta $c=19/4$

43. Izan bitez $y=x^2+1$ parabola eta $y=x+1$ zuzena.
 a) Kalkulatu bi funtzioek mugaturiko azalera.
 b) Parabolari ukitzailea eta emandako zuzenari paraleloa den zuzenaren ekuazioa bila ezazu.

Sol.: $A=1/6 u^2$; $y=(4x+3)/4$

44. $y=x^2$ parabolak eta $y=\lambda x$ zuzenak mugaturiko azalera 1 bada, kalkulatu λ -ren balioa.

Sol.: $6^{(1/3)}$

45. Izan bedi $f(x)=\sqrt[3]{x}$ funtzioa,

- a) Kalkulatu $x=1$ abzisa ukitzailearen ekuazioa.
 b) Egin funtzioa eta ukitzailearen adierazpen grafikoa.
 c) Kalkulatu barrutiaren azalera.

Sol.: $y=1/3 (x+2)$; ...; $A=6,75 u^2$



46. Izan bitez $f(x)=6-x^2$ eta $f(x)=|x|$ funtzioak,

- a) Irudikatu bi kurbek mugatzen duten barrutia.
 b) Kalkulatu barrutiaren azalera.

Sol.: ...; $44/3 u^2$

47. Kalkulatu $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}$. Zer adierazten du geometrikoki?

Sol.: $1/2 \ln(9/5)$; funtzioak, abzisa ardatzak, $x=0$ eta $x=2$ zuzenek mugaturiko azalera.

48. Izan bedi $f(x)=\begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x \cdot \sin(x), & x > 0 \end{cases}$ funtzioa,

- a) Ikertu deribagarritasuna.
 b) Kalkulatu $\int_{-1}^{\pi/2} 2 \cdot f(x) dx$

Sol.: $x=0$ denean ez da deribagarria; 1

49. Bi funtziori buruz zera esagutzen da: $\int_1^2 (f(x)+g(x)) dx = 3$,

$\int_2^3 3(f(x)-g(x)) dx = 3$, $\int_1^3 f(x) dx = 3$ eta $\int_1^2 2 f(x) dx = 3$. Kalkulatu, posible baldin bada, $\int_1^3 g(x) dx$ eta, posible ez bada, esan zergatia.

Sol.: 2

50. Izan bedi $f(x)=|x+1|$ funtzioa,

- a) Egin adierazpen grafikoa
 b) Ikertu bere deribagarritasuna.
 c) Kalkulatu $\int_{-2}^3 f(x) dx$

Sol.: ...; ez da deribagarria; $17/2$

51. Jakinda $\int_1^5 f(x) dx = 3$, $\int_1^5 g(x) dx = 3$, $\int_1^3 f(x) dx = 3$ eta $\int_3^5 g(x) dx = 3$ direla, kalkulatu $\int_3^5 [f(x)+3g(x)] dx - \int_1^3 [3f(x)+g(x)] dx =$

Sol.: 0

52. Izan bedi $f(x) = 1 + x|x|$ funtzioa,

- Kalkulatu $f'(x)$
- Kalkulatu gorakor- eta beherakor-tarteak
- Kalkulatu $\int_{-1}^2 x f(x) dx$

$$\text{Sol.: } f'(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}; \text{ gorakorra beti; } 23/4$$



53. a) Irudikatu $y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ eta $x=0$ kurbak mugaturiko barrutia.
b) Kalkulatu barruti horren azalera.

$$\text{Sol.: } \dots; 2e-1 \ u^2$$

54. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ funtzioak $x=0$ abzisa mutur erlatiboa du, $x=-1$ abzisa inflexio-puntua eta $\int_0^1 f(x) dx = 6$ balio du. Kalkulatu a , b eta c .

$$\text{Sol.: } a=3, b=0 \text{ eta } c=19/4$$

55. Izan bedi $f(x) = x^2 e^x$ funtzioa. Kalkulatu $f(x)$ funtzioak eta bere funtzio deribatuak mugaturiko azalera.

$$\text{Sol.: } 2-6e^{-2} \ u^2$$

56. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$ eta $y = 8x$ funtzioak izanik, a) egin adierazpen grafikoa. b)

Kalkulatu beraiek mugaturiko azalera.

$$\text{Sol.: } 3/2$$

57. Izan bedi edozein zenbaki erreal positiborentzat definituta dagoen

$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$ funtzioa. a) Egin adierazpen grafikoa. b) Kalkulatu

$\int_0^3 f(x) dx$ eta emaitza interpretatu geometrikoki.

$$\text{Sol.: } \dots; 5/3; \text{ markatutako barrutiaren azalera}$$

58. Izan bedi $f(x) = x \cdot \cos(x)$ funtzioa,

- Infinituan limitea dauka? Arrazoitu erantzuna
- Kalkulatu $f(x)$ -ren integrala $x=0$ eta funtzioaren lehen zero positiboren artean. (Oharra: Funtzioaren zeroak bera anulatzen dutenak dira)

$$\text{Sol.: } \dots; \pi/2-1$$

59. Kalkulatu $f(x) = e^x$ funtzioak eta $x=-1$ eta $x=1$ abzisa puntuak lotzen dituen kordak mugaturiko azalera.

$$\text{Sol.: } 2/e \ u^2$$

60. Izan bedi $f(x) = \begin{cases} x e^{x^2}, & x \leq 0 \\ ax + b, & 0 < x < 1 \\ 1 + x \ln(x), & x \geq 1 \end{cases}$ funtzio jarraitua,

a) Kalkulatu a eta b .

b) Kalkulatu $\int_0^2 f(x) dx$

$$\text{Sol.: } a=1 \text{ eta } b=0; \ 3/4 + 3 \ln(2)$$

61. Izan bedi $f(x)=|x-1|+1$ funtzioa,
a) Bilatu jatorrizko bat.

b) Kalkulatu $\int_0^2 x \cdot f(x) dx$

$$\text{Sol.: } F(x) = \begin{cases} -x^2/2 + 2x + k1, & x < 1 \\ x^2/2 + k2, & x \geq 1 \end{cases}; 3$$



62. a) Kalkulatu $f(x) = x\sqrt{1-4x^2}$ funtzioaren izate-eremua.

b) Kalkulatu $\int_0^{1/2} f(x) dx$

Sol.: $[-1/2, 1/2]; 1/12$

63. Bila ezazu $y=-x^2+5$ eta $y=\frac{4}{x^2}$ funtzioak mugaturiko azalera. Irudikatu barrutia.

Sol.: $4/3 u^2$

64. $y=e^x$, eta $y=e^{-x}$ kurbak eta $x=k$ zuzenak mugaturiko azalera $1 u^2$ bada, kalkulatu k -ren ($k>0$), balioa.

Sol.: $0,9624$

65. Kalkulatu $\int_0^1 \frac{x^3 + 3x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} dx$

Sol.: $1/2 + 2\ln(3) - 3\ln(2)$

66. $f(x)=x^2 \sin(x)$ funtzioa eta abzisa ardatzak jatorria eta funtzioa anulatzeko den x -en lehen balio positiboak mugaturiko azalera kalkulatu ezazu.

Sol.: $\pi^2 - 4 u^2$

67. Bila ezazu $y = -x^2+5$ eta $y = \frac{4}{x^2}$ kurbak mugaturiko azalera. Egin barrutiaren adierazpena.

Sol.: $4/3 u^2$

68. $y=x-x^2$ parabolak OX ardatzarekin barruti bat osatzen du. Bila ezazu $(0,0)$ puntutik igaro eta barrutia bi zati berdinetan banatzen duen zuzenaren ekuazioa.

Sol.: $y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)x$

69. Heron-ek deskubritu zuen a , b eta c aldeak dituen triangelu baten azalera

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

delako. Heron-en formula erabilita edo

beste metodo batez, perimetroa 32 cm eta oinarria 12 cm luze dituen azalera maximodun triangelua bila ezazu.

Sol.: $a=12 \text{ cm}, b=10 \text{ cm} \text{ eta } c=10 \text{ cm}$

70. Kalkulatu ezazu $y=x^2$ eta $y=2-x^2$ kurbak mugaturiko azalera.

Sol.: $8/3 u^2$

71. Izan bedi $y=x e^{ax}$, $a \neq 0$ funtzioa. Kurbak, $y=0$, $x=0$ eta $x=1$ zuzenek mugaturiko azalera $\frac{1}{a^2}$ dela jakinda, kalkulatu a -ren balioa.

Sol.: $a=1$

72. Egun konkretu batean aireportu batetik igarotzen den ibiltari-kopurua $P(t)=432t-t^3$ funtzioak ematen du (t , denbora ordutan izanik eta $P(t)$ t unean ibiltari-kopurua).

- a) Testuingurua kontutan izanda egin adierazpen grafikoa.
- b) Egun horretako ibiltari-kopururik handiena zein izan zen eta noiz?
- c) Zenbat ibiltari igarotzen dira 0:00tik 18:00ra?

Sol.: ...; 3.456 pertsona $t=12$; 43.740 pertsona

